



115學測

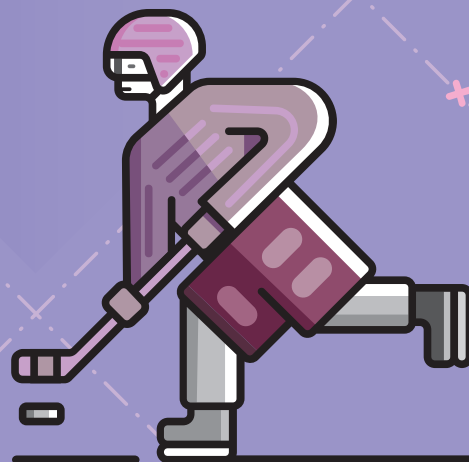
精彩



解析

✦ 數學 考科

◆臺中一中・李宜展 老師
大園高中・葉子榕 老師



總編輯 / 李心筠

企 編 / 高湘婷

責 編 / 吳崇欽・林孟潔・黃美甄

美 編 / 郭慧娟・歐詩妤・林素儀

出 版 / 民國一五年二月

發行所 / 702008 臺南市新樂路76號

翰林官網 <https://www.hle.com.tw>

◎ 本書內容同步刊載於翰林官網



00847-02

翰林 相信學習

臺中一中／李宜展 老師

一、前言

115 學年度的學測在 1 月 17 日～1 月 19 日舉辦。在分析今年的學測數學 A 試題之前，我們先來回顧一下 108 課綱的前四年度學測數學 A 試題的五標（單位：級分）。

學年度	頂標	前標	均標	後標	底標
111	10	8	6	4	3
112	11	9	7	5	4
113	12	10	7	5	3
114	11	9	6	4	3

從上面表格可以看出，除了 113 學年度的頂標是 12 級分，其他年頂標均在 11 級分以下，觀察 114 學年度數學 A 考科的頂標在 11 級分 ($61.27 < X \leq 67.39$)，考 85.77 分即能 15 級分。有人甚至預期在去年頂標下降，今年是否回到 113 年的難度。以下筆者先利用表格呈現今年大學學測試題內容，如此便能讓讀者很清楚地看出此次考試內容，最後分析這次試題的特色，以作為老師們參考。

二、試題分布

冊別	單元	題型	難易度	分數合計	單冊合併計分
第一冊	第一章 數與式	單選 2	中偏易	5 分	25 分
	第二章 指數、對數	(單選 3)	中		
	第三章 多項式函數	多選 12	難	5 分	
		(選填 14)	易		
		選填 16	中	5 分	
	第四章 直線與圓	單選 6	中偏難	5 分	
		多選 7	易	5 分	
第二冊	第一章 數列與級數	單選 3	中	5 分	25 分
		多選 8	中偏難	5 分	
		(選填 15)	中		
	第二章 數據分析	多選 9	中偏難	5 分	
	第三章 排列組合與機率	單選 4	中	5 分	
	第四章 三角比	選填 17	難	5 分	

冊別	單元	題型	難易度	分數合計	單冊合併計分
第三冊 A	第一章 三角函數	多選 11	中偏難	5 分	20 分
		(選填 17)	難		
	第二章 指數與對數函數	選填 15	中	5 分	
	第三章 平面向量	多選 10	中	5 分	
		選填 14	易	5 分	
第四冊 A	第一章 空間向量	混合 18	易	3 分	30 分
		混合 20	難	8 分	
	第二章 空間中的平面與直線	混合 19	易	4 分	
	第三章 機率	單選 1	易	5 分	
		選填 13	易	5 分	
	第四章 矩陣	單選 5	中偏難	5 分	
		(多選 8)	中偏難		

(若題目有跨多個章節，但僅用到次要概念，則用括號表示，不計入分數合計)

由上表可看出此次學測與前四年的學測試題數相同，均為 20 題，題型維持單選題、多選題、選填題、混合題組的型態，分別是 6 題 (30 %)、6 題 (30 %)、5 題 (25 %) 及 3 小題 (15 %)。此次學測四冊的內容明顯偏重第四冊 (30 %)。而難易度「中」以下的題目佔了近 6 成，其中「易」的題目近 3 成。

三、試題特色

1. 簡單題目變多：

這次考題中，閱讀一下就有辦法解出來的題目較去年多。如單選 1 的期望值、多選 7 的二元一次聯立不等式、選填 13 的貝氏定理、選填 14 的向量垂直，及混合 18 的外積長度、混合 19 的平面方程式，都算是基本觀念題。而單選 2 雖然考出少見的高斯符號，但仔細一看便發現不難，單選 3 考的是簡單的指數律，單選 4 則是容易的排列組合，算是給程度不好的考生一個鼓勵，寫對這些題目就可拿 40 多分了。

2. 多選題難度增加：

去年及前年的多選以考概念為主，今年的多選難度就困難許多。除了多選 7 的二元一次聯立不等式及多選 10 的平面向量，其他題目都不太容易，主要是考一個概念延伸至不同層次的題目，而且在判斷選項的過程中，計算繁雜，有的甚至需要考生在考試時找出反例，算是很吃力的一大題。對於習慣前四年考古題模式的考生會是一大震撼。多選 8 考遞迴關係和矩陣乘法的結合，須熟悉遞迴的概念。多選 9 考的是 T 分數與標準化數據的關係，需自己找例子驗證。多選 11 則出現直線與三角函數的交點情形，而多選 12 則是考三次函數的對稱中心，算是最難的一題多選。

3. 鑑別高手題：

除了剛剛提到的多選外，單選 5 的線性組合概念，學生如果沒有察覺到出題者的意圖，應該很難寫出來。而單選 6 算是不難的題目，但容易因為沒扣到三點共線的情形而掉入陷阱，推估此題答對率大概不高。選填 17 需善用倍角公式及正弦定理。這些題目算是 15 級分的關鍵。

4. 混合題組：

今年的混合題出現了 3 小題，而 2 小題需要學生手寫。18 及 19 兩題算是超級送分題，一個步驟即可完成。但 20 題除了配分有 8 % 外，難度提昇許多，而且前面兩題無法提示此題的作法，甚至會誤導方向。這題考外積的應用，計算量大，也屬於鑑別高手的題目，如果要 15 級分，也許至少要拿到 4 分才行。

四、結 語

整體而言，基本題比去年多，程度不好的考生要懂得先找出這些基本題目並拿下。多選題需要較高的數學素養，如同前四年考古題，單選題及選填題的最後兩題仍是高手關鍵。今年考題的難度配置有別於前四年，容易讓考生措手不及，認真的同學要考均標以上不算難，但要拿 14、15 級分就得靠平時針對難題的訓練，以增加抗壓性。而今年沒有出現轉移矩陣、空間中的直線方程式、三角函數的疊合，這些未出現的內容，也許是今年分科測驗或明年學測該注意的考點。

第壹部分、選擇（填）題（占85分）

一、單選題（占30分）

說明：第 1. 題至第 6. 題，每題 5 分。

1. 財神廟舉辦抽發財金活動：參加者抽兩次籤，每次抽籤出現「吉」、「祥」的機率皆為 $\frac{1}{3}$ 。

如果兩次都抽得「吉」，獲得獎金 180 元；如果兩次都抽得「祥」，獲得獎金 90 元；其餘情況則無獎金。試問參加者可獲獎金的期望值為何？

- (1) 20 元 (2) 30 元 (3) 45 元 (4) 60 元 (5) 90 元

答 案：(2)

命題出處：第四冊 A 第三章 機率

測驗目標：獨立事件與期望值的計算

難 易 度：易

詳 解：機率分布如下表：

情形	2 吉	2 祥	其他
獎金	180 元	90 元	0 元
機率	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2$

$$\text{期望值為 } 180 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 90 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 0 \times \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right] = 20 + 10 + 0 = 30 \text{ (元)}$$

故選(2)

2. 對任一實數 a ，令 $[a]$ 代表滿足 $[a] \leq a < [a] + 1$ 的整數，例如： $[3] = 3$ ， $[3.1] = 3$ ，

$[-3.1] = -4$ 。關於函數 $f(x) = [\sqrt{99-x}] + [\sqrt{99+x}]$ ，其中 $-99 \leq x \leq 99$ ；試選出正確的選項。

- (1) $f(-20) \leq f(0) < f(1)$
(2) $f(-20) < f(1) \leq f(0)$
(3) $f(1) < f(-20) \leq f(0)$
(4) $f(0) < f(-20) \leq f(1)$
(5) $f(0) \leq f(1) < f(-20)$

答 案：(1)

命題出處：第一冊第一章 數與式

測驗目標：根式的估計

難易度：中偏易

詳解： $f(-20)=[\sqrt{119}]+[\sqrt{79}]=10+8=18$
 $f(0)=[\sqrt{99}]+[\sqrt{99}]=9+9=18$
 $f(1)=[\sqrt{98}]+[\sqrt{100}]=9+10=19$
 $\therefore f(-20) \leq f(0) < f(1)$
 故選(1)

3. 設 $f(x)=a^x$ ，其中 a 為正實數。已知 c_1, c_2, c_3 是公差為 $\frac{10}{3}$ 的等差數列，且 $f(c_1), f(c_2), f(c_3)$ 是公比為 4 的等比數列。則等比數列 $f(10), f(8), f(6)$ 的公比為何？

- (1) $2^{\frac{-6}{5}}$ (2) $2^{\frac{-3}{5}}$ (3) $2^{\frac{3}{5}}$ (4) $2^{\frac{6}{5}}$ (5) $2^{\frac{5}{3}}$

答案：(1)

命題出處：第一冊第二章 指數、對數、第二冊第一章 數列與級數

測驗目標：結合指數概念與等差、等比數列的應用

難易度：中

詳解： $\because f(c_1), f(c_2), f(c_3)$ 的公比為 4

$$\text{則 } \frac{f(c_2)}{f(c_1)} = \frac{a^{c_2}}{a^{c_1}} = a^{c_2-c_1} = 4$$

$$\text{又 } c_1, c_2, c_3 \text{ 的公差為 } \frac{10}{3}$$

$$\text{即 } a^{c_2-c_1} = a^{\frac{10}{3}} = 4 \Rightarrow a = 4^{\frac{3}{10}}$$

$$\text{可得所求公比為 } \frac{f(8)}{f(10)} = \frac{a^8}{a^{10}} = a^{-2} = (4^{\frac{3}{10}})^{-2} = 4^{\frac{-3}{5}} = (2^2)^{\frac{-3}{5}} = 2^{\frac{-6}{5}}$$

故選(1)

4. 某網遊有 16 種材料，其中 6 種為基本材料，10 種為進階材料。任選 3 種不同材料可以合成出草藥、食物、藥水中的 1 類道具，其合成規則如下：若 3 種材料均為基本材料，則合成結果必為同一種草藥；若 3 種材料中 2 種為基本材料、1 種為進階材料，則合成結果會根據不同的進階材料得到不同種的食物，但不會受到基本材料不同而改變；其他的組合都會合成出不同種的藥水。試問此網遊總共可合成出多少種道具？

- (1) 256 (2) 370 (3) 401 (4) 455 (5) 560

答案：(3)

命題出處：第二冊第三章 排列組合與機率

測驗目標：理解排列或組合的原理

難易度：中

詳 解：分三種情形：

① 3 種皆為基本材料：恰合成出同 1 種道具

② 2 種基本材料 + 1 種進階材料：可合成出 $C_1^{10} = 10$ 種道具

③ 其他：可合成出 $C_3^{16} - C_3^6 - C_2^6 \times C_1^{10} = 560 - 20 - 150 = 390$ 種道具

綜上所述，共可合成出 $1 + 10 + 390 = 401$ 種道具

故選(3)

5. 已知實數三階方陣 A 滿足 $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $A \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 。試問有多少個行向量 $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ 滿足 $A \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 且 $\vec{v}$ 垂直於行向量 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$?

(1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個 (4) 0 個 (5) 無窮多個

答 案：(5)

命題出處：第四冊 A 第四章 矩陣

測驗目標：矩陣乘法的線性組合

難 易 度：中偏難

詳 解：設 $a \begin{pmatrix} A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} A \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，其中 a, b, c 為實數

$$\text{即 } a \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{可得 } \begin{cases} b=1 \\ -a+b=0, \text{ 即 } a=1, b=1 \\ a=1 \end{cases}$$

$$\therefore A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{pmatrix} A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A \begin{bmatrix} 1+c \\ 0 \\ 1-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ 則 } \vec{v} = \begin{bmatrix} 1+c \\ 0 \\ 1-c \end{bmatrix} \text{ 滿足 } A \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{又 } (1+c, 0, 1-c) \cdot (0, 1, 0)$$

$$= (1+c) \times 0 + 0 \times 1 + (1-c) \times 0 = 0 + 0 + 0 = 0$$

$\therefore \vec{v}$ 必垂直於 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ，也就是有無窮多個 $\vec{v}$ 滿足條件

故選(5)

6. 坐標平面上有 $A(2, -2)$, $B(-1, 2)$ 兩點，試問直線 $y = -6$ 上有多少個點 C 使得 $\triangle ABC$ 為等腰三角形？

(1) 1

(2) 2

(3) 3

(4) 4

(5) 5

答 案：(2)

命題出處：第一冊第四章 直線與圓

測驗目標：圓與直線關係的應用

難 易 度：中偏難

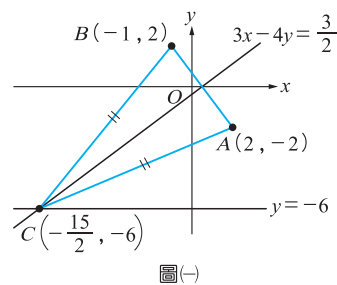
詳 解： $\overline{AB} = \sqrt{(-1-2)^2 + (2-(-2))^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$\triangle ABC$ 為等腰三角形有以下情形：

① $\overline{AC} = \overline{BC}$ ：

此時點 C 在 $\overline{AB}$ 的中垂線 $3x - 4y = \frac{3}{2}$ 上

$y = -6$ 代入得點 $C\left(-\frac{15}{2}, -6\right)$ ，如圖(一)



② $\overline{AC} = \overline{AB} = 5$ ：

此時點 C 在以點 A 為圓心， $\overline{AB} = 5$ 為半徑的圓 $\Gamma_1: (x-2)^2 + (y+2)^2 = 25$ 上

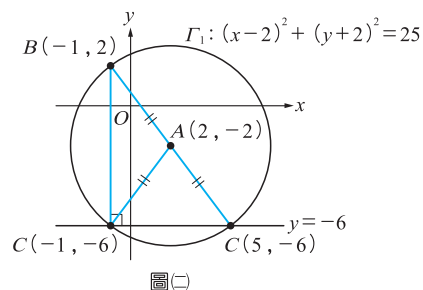
$y = -6$ 代入 Γ_1 得

$$(x-2)^2 + 16 = 25$$

$$\Rightarrow x = -1 \text{ 或 } 5$$

($x = 5$ 不合 $\because$ 三點共線不能構成一個三角形)

因此可得點 $C(-1, -6)$ ，如圖(二)



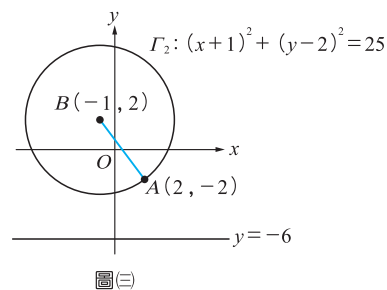
③ $\overline{BC} = \overline{AB} = 5$ ：

此時點 C 在以點 B 為圓心， $\overline{AB} = 5$ 為半徑的圓 $\Gamma_2: (x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$ 上

$y = -6$ 代入 Γ_2 得

$$(x+1)^2 + 64 = 25$$

$$\Rightarrow x \text{ 無解，如圖(三)}$$



由①、②、③可知，共有 2 個點 C 符合條件

故選(2)

二、多選題 (占 30 分)

說明：第 7. 題至第 12. 題，每題 5 分。

7. 坐標平面上同時滿足 $\begin{cases} 2x-y-3>0 \\ x+2y+1<0 \end{cases}$ 的點 $P(x, y)$ 可能位在下列哪些選項？

- (1) 第一象限
- (2) 第二象限
- (3) 第三象限
- (4) 第四象限
- (5) x 軸

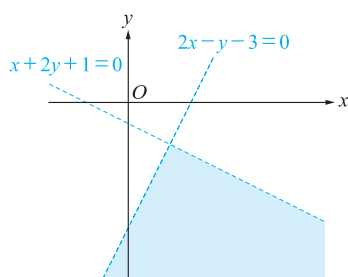
答 案：(3)(4)

命題出處：第一冊第四章 直線與圓

測驗目標：二元一次聯立不等式的解區域

難 易 度：易

詳 解：依題意，畫出聯立不等式的圖形，如下圖



故選(3)(4)

8. 已知 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ，且對所有正整數 $n \geq 2$ ，令 $A^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}$ 。試選出正確的選項。

- (1) $b_2 < c_2$
- (2) $A^2 = 2A + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- (3) $c_{n+2} = c_{n+1} + 2c_n$
- (4) $\begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{n+1} \\ d_{n+1} \end{bmatrix}$
- (5) $d_{2n} - a_{2n} = (d_n)^2 - (a_n)^2$

答 案：(2)(5)

命題出處：第二冊第一章 數列與級數、第四冊 A 第四章 矩陣

測驗目標：結合遞迴關係與矩陣乘法

難 易 度：中偏難

詳 解：(1) $\times$ ： $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow b_2 = c_2 = 2$

(2) $\circ$ ： $2A + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = A^2$

(3) $\times$ ：由 $A^{n+2} = A^{n+1} \cdot A$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a_{n+2} & b_{n+2} \\ c_{n+2} & d_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a_{n+1} + b_{n+1} & a_{n+1} \\ 2c_{n+1} + d_{n+1} & c_{n+1} \end{bmatrix}$$

$$\therefore c_{n+2} = 2c_{n+1} + d_{n+1}, d_{n+2} = c_{n+1} \Rightarrow d_{n+1} = c_n$$

$$\text{即 } c_{n+2} = 2c_{n+1} + c_n$$

(4) $\times$ ： $\begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_n \\ d_n \end{bmatrix}$

$$\text{又由(3)知，} b_{n+2} = a_{n+1} \Rightarrow b_{n+1} = a_n \neq b_n, d_{n+1} = c_n \neq d_n$$

$$\therefore \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} b_{n+1} \\ d_{n+1} \end{bmatrix}$$

(5) $\circ$ ：由 $A^{2n} = A^n \cdot A^n$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a_{2n} & b_{2n} \\ c_{2n} & d_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_n)^2 + b_n c_n & a_n b_n + b_n d_n \\ c_n a_n + d_n c_n & c_n b_n + (d_n)^2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore d_{2n} - a_{2n} = (c_n b_n + (d_n)^2) - ((a_n)^2 + b_n c_n) = (d_n)^2 - (a_n)^2$$

故選(2)(5)

9. T 分數為評量成績的一種方式，其計算方式如下：設全班平均成績為 μ 且標準差為 σ 。若某生原始成績為 S ，則他該科之 T 分數為 $T = 50 + 10 \left(\frac{S - \mu}{\sigma} \right)$ 。已知某班期末數學和英文兩科的平均成績皆為 60，數學成績的標準差為 12，英文成績的標準差為 8。試選出正確的選項。

(1) 若甲生英文的原始成績為 52，則其 T 分數為 40

(2) 各生數學的 T 分數不會超過其原始成績

(3) 若乙生兩科的原始成績平均比丙生兩科的原始成績平均高，則乙生兩科的 T 分數平均比丙生兩科的 T 分數平均高

(4) 若該班級兩科的及格標準均為 T 分數大於或等於 40，則數學及格的原始成績比英文及格的原始成績低

(5) 該班原始成績數學對英文的迴歸直線 (即最適直線) 之斜率與該班 T 分數數學對英文的迴歸直線之斜率相同

答 案：(1)(2)(4)

命題出處：第二冊第二章 數據分析

測驗目標：一維數據與二維數據的判讀

難 易 度：中偏難

詳 解：(1) ○： $T_{英} = 50 + 10\left(\frac{52-60}{8}\right) = 50 - 10 = 40$

(2) ○： $T_{數} = 50 + 10\left(\frac{S_{數}-60}{12}\right) = \frac{5}{6}S_{數} \leq S_{數}$

(3) ✕：不一定，反例：如下表

分數 人	原始成績			T 分數		
	$S_{數}$	$S_{英}$	$S_{均}$	$T_{數}$	$T_{英}$	$T_{均}$
乙生	72	52	62	60	40	50
丙生	60	60	60	50	50	50

不符合選項敘述

(4) ○： $T_{數} = 50 + 10\left(\frac{S_{數}-60}{12}\right) \geq 40 \Rightarrow S_{數} \geq 48$

$T_{英} = 50 + 10\left(\frac{S_{英}-60}{8}\right) \geq 40 \Rightarrow S_{英} \geq 52$

故數學及格的原始成績比英文及格的原始成績低

(5) ✕：T 分數數學對英文之迴歸直線為 $T_{數} - 50 = r(T_{英} - 50)$

由 T 分數公式知， $T_{數} = \frac{5}{6}S_{數}$ ， $T_{英} = \frac{5}{4}S_{英} - 25$

可得原始成績數學對英文之迴歸直線為 $\frac{5}{6}S_{數} - 50 = r\left(\frac{5}{4}S_{英} - 25 - 50\right)$

斜率為 $r \times \frac{5}{4} \times \frac{6}{5} = \frac{3}{2}r \neq r$

故選(1)(2)(4)

10. 已知四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AB}$ 平行 $\overline{DC}$ ， $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 交於 E 。若 $\overrightarrow{AB} = (2, -6)$ ， $\overrightarrow{AD} = (1, 5)$ 且 $\triangle ABE$ 面積為 3。試選出正確的選項。

(1) $\cos \angle BAD = \frac{-7\sqrt{65}}{65}$

(2) $\triangle ABD$ 面積為 9

(3) $\overrightarrow{AE} = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

(4) 四邊形 $ABCD$ 面積為 $\frac{65}{3}$

(5) $\overline{BC} < \frac{8}{3}$

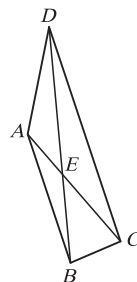
答 案：(1)(5)

命題出處：第三冊 A 第三章 平面向量

測驗目標：向量的線性組合與面積

難易度：中

詳解：畫圖如右



$$(1) \bigcirc : \cos \angle BAD = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AD}}{|\vec{AB}| |\vec{AD}|} = \frac{(2, -6) \cdot (1, 5)}{\sqrt{2^2 + (-6)^2} \sqrt{1^2 + 5^2}}$$

$$= \frac{-28}{\sqrt{40} \sqrt{26}} = \frac{-7}{\sqrt{65}} = \frac{-7\sqrt{65}}{65}$$

$$(2) \times : \triangle ABD \text{ 面積為 } \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 5 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |10 + 6| = 8$$

(3) $\times$: 承(2)可得,

$$\overline{BE} : \overline{DE} = \triangle ABE \text{ 面積} : \triangle ADE \text{ 面積} = 3 : (8 - 3) = 3 : 5$$

$$\therefore \vec{AE} = \frac{3}{8} \vec{AD} + \frac{5}{8} \vec{AB}$$

$$= \frac{3}{8} (1, 5) + \frac{5}{8} (2, -6) = \left(\frac{13}{8}, -\frac{15}{8} \right)$$

$$(4) \times : \text{承(3)}, \triangle ABE \text{ 面積} : \triangle CDE \text{ 面積} = \overline{BE}^2 : \overline{DE}^2 = 9 : 25$$

$$\text{可得 } \triangle CDE \text{ 面積} = \frac{25}{9} \triangle ABE \text{ 面積} = \frac{25}{9} \times 3 = \frac{25}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{又 } \triangle BCE \text{ 面積} &= \triangle BCD \text{ 面積} - \triangle CDE \text{ 面積} \\ &= \triangle ACD \text{ 面積} - \triangle CDE \text{ 面積} \\ &= \triangle ADE \text{ 面積} = 5 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{四邊形 } ABCD \text{ 面積為 } 3 + \frac{25}{3} + 5 \times 2 = \frac{64}{3}$$

$$(5) \bigcirc : \triangle ACD \text{ 面積} = \triangle ADE \text{ 面積} + \triangle CDE \text{ 面積}$$

$$= 5 + \frac{25}{3} = \frac{40}{3} = \frac{5}{3} \times \triangle ABD \text{ 面積}$$

$$\therefore \vec{DC} = \frac{5}{3} \vec{AB} = \frac{5}{3} (2, -6) = \left(\frac{10}{3}, -10 \right)$$

$$\Rightarrow \vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AD} + \vec{DC} = (-2, 6) + (1, 5) + \left(\frac{10}{3}, -10 \right) = \left(\frac{7}{3}, 1 \right)$$

$$\Rightarrow |\vec{BC}| = \overline{BC} = \sqrt{\left(\frac{7}{3} \right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{58}}{3} < \frac{8}{3}$$

故選(1)(5)

11. 令 Γ 為坐標平面上 $y = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 的圖形。對任一實數 $m \neq 0$ ，以 L_m 表示直線 $y = mx + 1$ 。試選出正確的選項。

- (1) $m > 0$ 時， L_m 和 Γ 交點的 x 坐標皆為負
- (2) 若 (a, b) 為 L_m 和 Γ 的交點，則 $(-a, b)$ 為 L_{-m} 和 Γ 的交點
- (3) 可以找到一實數 $m \neq 0$ 使得 L_m 和 Γ 交於點 $\left(\frac{20}{3}, \frac{1}{2}\right)$
- (4) 若 L_m 與 Γ 有一交點在直線 $y = -1$ 上，則 $\frac{1}{m}$ 是奇數
- (5) 若 L_m 與 Γ 有一交點在 x 軸上，則 L_m 與 Γ 有偶數個交點

答 案：(2)(4)

命題出處：第三冊 A 第一章 三角函數

測驗目標：三角函數的圖形與直線的關係

難 易 度：中偏難

詳 解：(1) $\times$ ：反例： $(0, 1)$ 為 $y = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 和 $y = mx + 1$ 之一交點，此時 x 坐標為 0

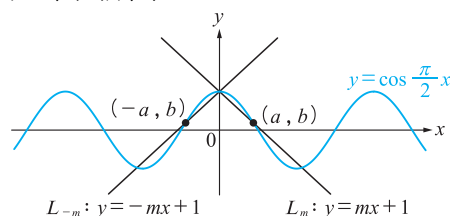
(2) $\circ$ ： $\because (a, b)$ 在 L_m 及 Γ 上 $\therefore b = ma + 1$ 且 $b = \cos\left(\frac{\pi}{2}a\right)$

得 $b = (-m)(-a) + 1$ 且 $b = \cos\left(\frac{\pi}{2}(-a)\right)$

即 $(-a, b)$ 也在 L_{-m} 及 Γ 上 $\therefore (-a, b)$ 為 L_{-m} 和 Γ 的交點

〈另解〉

如下圖所示，



(3) $\times$ ： $\left(\frac{20}{3}, \frac{1}{2}\right)$ 代入 $\begin{cases} y = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \\ y = mx + 1 \end{cases}$ ，得 $\begin{cases} \frac{1}{2} = \cos\frac{10}{3}\pi \cdots \cdots \textcircled{1} \\ \frac{1}{2} = \frac{20}{3}m + 1 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$

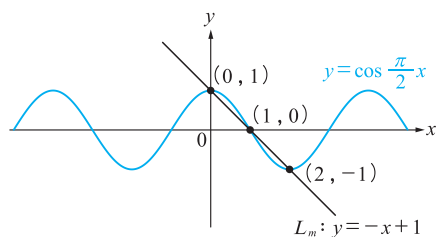
①不可能成立 $\Rightarrow$ 不存在實數 m 使得 L_m 和 Γ 交於 $\left(\frac{20}{3}, \frac{1}{2}\right)$

(4) $\circ$ ： $y = -1$ 代入 $\begin{cases} y = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \\ y = mx + 1 \end{cases}$ ，得 $\begin{cases} -1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cdots \cdots \textcircled{3} \\ -1 = mx + 1 \cdots \cdots \textcircled{4} \end{cases}$

由③得 $x = 2 + 4k$ ， k 為整數

$\therefore$ 由④得 $\frac{1}{m} = \frac{x}{-2}$ 必為奇數

(5) $\times$ ：不一定，如下圖所示，此時 L_m 和 Γ 有奇數個交點



故選(2)(4)

12. 令 $f(x)$ 、 $g(x)$ 為實係數三次多項式且 $f(x)$ 的首項係數為 1，已知 $f(x) - g(x) = 2x^3 + 2x$ 。令 Γ_1 和 Γ_2 分別為 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在坐標平面上的函數圖形，其對稱中心分別為 (a_1, b_1) ， (a_2, b_2) 。試選出正確的選項。

- (1) Γ_1 和 Γ_2 恰交於三點
- (2) $a_1 + a_2$ 可唯一確定
- (3) $b_1 + b_2$ 可唯一確定
- (4) 若 $a_1 = a_2$ ，則 $b_1 = b_2$
- (5) 若 $b_1 = b_2$ ，則 $a_1 = a_2$

答 案：(2)(4)

命題出處：第一冊第三章 多項式函數

測驗目標：三次函數及其對稱中心

難 易 度：難

詳 解：設 $f(x) = (x - a_1)^3 + c(x - a_1) + b_1$ ，其中 c 為實數

$$g(x) = f(x) - 2x^3 - 2x$$

(1) $\times$ ：若 Γ_1 和 Γ_2 有交點，則 $f(x) = g(x) \Rightarrow f(x) - g(x) = 2x^3 + 2x = 0$

$$\text{即 } x(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x = 0$$

Γ_1 和 Γ_2 恰交於一點

(2) $\circ$ ： $g(x) = (x - a_1)^3 + c(x - a_1) + b_1 - 2x^3 - 2x$

$$= -x^3 - 3a_1x^2 + (3a_1^2 + c - 2)x - a_1^3 - ca_1 + b_1$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{3a_1}{-3} = -a_1, \text{ 即 } a_1 + a_2 = 0$$

(3) $\times$ ：無法唯一確定，舉例如下：

$$\text{若 } f(x) = x^3, g(x) = -x^3 - 2x, \text{ 則 } b_1 + b_2 = 0$$

$$\text{若 } f(x) = x^3 + 1, g(x) = -x^3 - 2x + 1, \text{ 則 } b_1 + b_2 = 1 + 1 = 2$$

(4) $\circ$ ：若 $a_1 = a_2$ ，承(2)， $a_1 + a_2 = 0$

$$\therefore a_1 = a_2 = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 + cx + b_1, g(x) = -x^3 + (c - 2)x + b_1$$

$$\text{可得 } b_2 = b_1$$

$$\begin{aligned} (5) \times : \text{若 } f(x) &= (x-1)^3 - 2(x-1) \\ g(x) &= (x-1)^3 - 2(x-1) - 2x^3 - 2x \\ &= -x^3 - 3x^2 - x + 1 = -(x+1)^3 + 2(x+1) \end{aligned}$$

此時 $b_1 = b_2 = 0$ ，但 $a_1 \neq a_2$

故選(2)(4)

三、選填題 (占 25 分)

說明：第 13. 題至第 17. 題，每題 5 分。

13. 某高中聘用的全體教師 $\frac{1}{4}$ 只有學士學位， $\frac{3}{4}$ 有碩士學位。只有學士學位的教師中有 $\frac{1}{5}$ 通過英聽檢定，有碩士學位的教師中有 $\frac{3}{5}$ 通過英聽檢定。已知每位教師被抽到的機會相等，若

隨機抽選一位通過英聽檢定的教師，則該教師有碩士學位的條件機率為 $\frac{\textcircled{13-1}}{\textcircled{13-2} + \textcircled{13-3}}$ 。

(化為最簡分數)

答 案： $\frac{9}{10}$

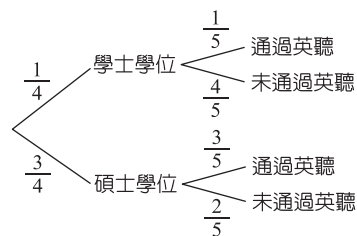
命題出處：第四冊 A 第三章 機率

測驗目標：貝氏定理的應用

難 易 度：易

詳 解： $P(\text{碩士學位} \mid \text{通過英聽}) = \frac{P(\text{碩士學位} \cap \text{通過英聽})}{P(\text{通過英聽})}$

$$= \frac{\frac{3}{4} \times \frac{3}{5}}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{5} + \frac{3}{4} \times \frac{3}{5}} = \frac{9}{10}$$



14. 坐標平面上，向量 (a, b) 與直線 $y = bx - 1$ 垂直，則 $a + b$ 的最大可能值為 $\frac{\textcircled{14-1}}{\textcircled{14-2}}$ 。

(化為最簡分數)

答 案： $\frac{1}{4}$

命題出處：第一冊第三章 多項式函數、第三冊 A 第三章 平面向量

測驗目標：結合二次函數極值與向量垂直的應用

難 易 度：易

詳 解： $y = bx - 1$ 即 $bx - y - 1 = 0$

法向量為 $(b, -1)$ $\therefore (a, b) \parallel (b, -1)$

得 $b \neq 0$ 且 $\frac{a}{b} = \frac{b}{-1} \Rightarrow b^2 = -a$

$$a + b = -b^2 + b = -\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$$

15. 已知三正數 a, b, c 成一等差數列，其中 $a < b < c$ ，且坐標平面上三點 $(a, \log 3a)$ 、

$(b, \log 4b)$ 、 $(c, \log 6c)$ 在同一直線上，則 $\frac{b}{a}$ 之值為 $\frac{\textcircled{15-1}}{\textcircled{15-2}}$ 。(化為最簡分數)

答 案： $\frac{3}{2}$

命題出處：第二冊第一章 數列與級數、第三冊 A 第二章 指數與對數函數

測驗目標：結合等差數列與對數的運算

難 易 度：中

詳 解：由 $(a, \log 3a)$ 、 $(b, \log 4b)$ 、 $(c, \log 6c)$ 共線，

$$\text{可得 } \frac{\log 4b - \log 3a}{b - a} = \frac{\log 6c - \log 4b}{c - b}$$

$$\text{又 } b - a = c - b$$

$$\therefore \log 4b - \log 3a = \log 6c - \log 4b$$

$$\Rightarrow \log \frac{4b}{3a} = \log \frac{6c}{4b} = \log \frac{3c}{2b}, \text{ 即 } \frac{4b}{3a} = \frac{3c}{2b} = \frac{3(2b-a)}{2b}$$

$$\therefore \frac{4}{3} \times \frac{b}{a} = 3 - \frac{3}{2} \times \frac{a}{b}$$

$$\text{令 } t = \frac{b}{a} > 1$$

$$\frac{4t}{3} = 3 - \frac{3}{2t} \Rightarrow 8t^2 = 18t - 9 \Rightarrow 8t^2 - 18t + 9 = 0 \Rightarrow (2t-3)(4t-3) = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{3}{2} \text{ 或 } \frac{3}{4} \text{ (不合 } \because t > 1)$$

16. 坐標平面上，已知二次函數圖形 $\Gamma: y=f(x)$ 的頂點 P 在直線 $y=1+2x$ 上，且交 x 軸於點 $A\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ 、 $B\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 。將 Γ 平移使得平移後圖形的頂點 Q 仍在直線 $y=1+2x$ 上，且亦

通過點 $B\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ，此時 P 、 Q 為兩相異點，則 $\overline{PQ} = \frac{\sqrt{(16-1)(16-2)}}{16-3}$ 。(化為最簡根式)

答 案： $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

命題出處：第一冊第三章 多項式函數

測驗目標：二次函數的平移

難 易 度：中

詳 解：令 $f(x) = a\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = ax^2 - \frac{1}{4}a$

$P\left(0, -\frac{1}{4}a\right)$ 在 $y=1+2x$ 上

$\therefore -\frac{1}{4}a = 1 \Rightarrow a = -4$ 得 $P(0, 1)$ ， $f(x) = -4x^2 + 1$

令 Γ 平移後為 $y = g(x) = -4(x-h)^2 + 1 + 2h$

將點 $B\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 代入得 $0 = -4\left(\frac{1}{2} - h\right)^2 + 1 + 2h$

$\Rightarrow 0 = -4\left(\frac{1}{4} - h + h^2\right) + 1 + 2h \Rightarrow -4h^2 + 6h = 0$

$\Rightarrow h(2h-3) = 0 \Rightarrow h = 0$ (不合) 或 $\frac{3}{2}$

故得點 $Q\left(\frac{3}{2}, 4\right)$

$\therefore \overline{PQ} = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - 0\right)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

17. 直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle CAB$ 為直角， $\overline{AB}$ 邊上一點 D ，滿足 $\angle BCD=2\angle ACD$ ，且 $\overline{BC}=2\overline{BD}$ 。

若 $\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AB}$ ，則 $k=\frac{\textcircled{17-1}}{\textcircled{17-2}\textcircled{17-3}}$ 。(化為最簡分數)

答案： $\frac{3}{11}$

命題出處：第二冊第四章 三角比、第三冊A第一章 三角函數

測驗目標：三角比及倍角公式的應用

難易度：難

詳解：令 $\angle ACD=\theta$ ， $\angle BCD=2\theta \Rightarrow \angle BDC=90^\circ+\theta$

如右圖

在 $\triangle BCD$ 中，由正弦定理，

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \angle BDC} = \frac{\overline{BD}}{\sin \angle BCD} \Rightarrow \frac{\overline{BC}}{\sin (90^\circ + \theta)} = \frac{\overline{BD}}{\sin 2\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{2\overline{BD}}{\cos \theta} = \frac{\overline{BD}}{2 \sin \theta \cos \theta} \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{4}$$

$$\text{令 } \overline{CD}=4x, \overline{AD}=x, \overline{AC}=\sqrt{15}x$$

$$\Rightarrow \overline{AB}=tx, \overline{BD}=(t-1)x, \overline{BC}=2(t-1)x$$

$$\text{由畢氏定理得, } (\sqrt{15}x)^2 + (tx)^2 = (2(t-1)x)^2$$

$$\Rightarrow 15 + t^2 = 4(t^2 - 2t + 1) \Rightarrow 3t^2 - 8t - 11 = 0$$

$$\Rightarrow (3t-11)(t+1)=0 \Rightarrow t=\frac{11}{3} \text{ 或 } -1 \text{ (不合)}$$

$$\therefore k = \frac{1}{t} = \frac{3}{11}$$

〈另解〉

作點 D 對 $\overline{AC}$ 的對稱點為點 D' ，如右圖

$$\text{可得 } \overline{BD} : \overline{DD'} = \overline{BC} : \overline{CD'} = \overline{BC} : \overline{CD}$$

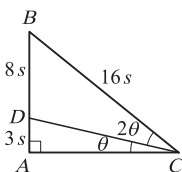
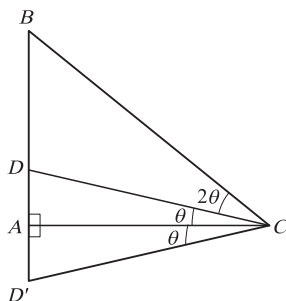
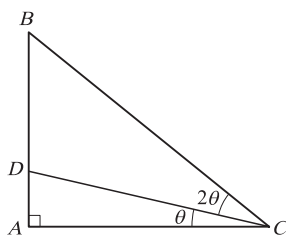
$$\therefore \overline{CD} = 2\overline{DD'} = 4\overline{AD} \Rightarrow \sin \theta = \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \frac{1}{4}$$

$$\text{又 } \sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta = 3 \times \frac{1}{4} - 4 \times \frac{1}{64} = \frac{11}{16}$$

$$\text{令 } \overline{BC} = 16s, \overline{AB} = 11s, \overline{BD} = 8s$$

$$\text{則 } \overline{AD} = 11s - 8s = 3s$$

$$\text{得 } k = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{3s}{11s} = \frac{3}{11}$$



第貳部分、混合題或非選擇題 (占 15 分)

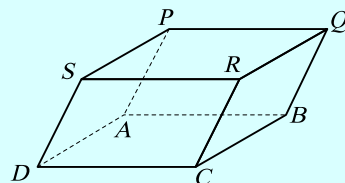
說明：本部分共有 1 題組，單選題每題 3 分，非選擇題配分標於題末。限在答題卷標示題號的作答區內作答。選擇(填)題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶(液)。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

18-20 題為題組

坐標空間中有一平行六面體 $PQRS-ABCD$ ，如圖所示。已知

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (-5, 5, 5), \quad \overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AP} = (-2, 0, -4),$$

$$\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB} = (6, -10, -8), \quad \overline{AP} = 6。試回答下列問題。$$



18. 試問平行四邊形 $ABCD$ 的面積為何？(單選題，3 分)

- (1) $2\sqrt{5}$
- (2) $5\sqrt{2}$
- (3) $5\sqrt{3}$
- (4) $6\sqrt{3}$
- (5) $10\sqrt{2}$

答 案：(3)

命題出處：第四冊 A 第一章 空間向量

測驗目標：外積長度的幾何意義

難 易 度：易

詳 解：平行四邊形 $ABCD$ 的面積為

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \sqrt{(-5)^2 + 5^2 + 5^2} = 5\sqrt{3}$$

故選(3)

19. 設 B 點坐標為 $(1, 2, 0)$ ，試求平面 $ABCD$ 的平面方程式。(非選擇題，4 分)

答 案： $x - y - z = -1$

命題出處：第四冊 A 第二章 空間中的平面與直線

測驗目標：平面方程式的標準式

難 易 度：易

詳 解：平面 $ABCD$ 之一法向量為 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (-5, 5, 5) \parallel (1, -1, -1)$

令平面 $ABCD$ 的平面方程式為 $x - y - z = k$

將點 $B(1, 2, 0)$ 代入得 $k = 1 - 2 - 0 = -1$

$\therefore$ 平面 $ABCD$ 的平面方程式為 $x - y - z = -1$

20. 試求平行六面體的體積，並求平行六面體上(含邊界)距點 A 的最長距離。(非選擇題，8 分)

答 案：體積為 10，距點 A 的最長距離為 $\sqrt{94}$

命題出處：第四冊 A 第一章 空間向量

測驗目標：外積與平行六面體體積的應用

難 易 度：難

詳 解： $\because \overrightarrow{AP} \perp (\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AP}), \overrightarrow{AP} \perp (\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}) \therefore \overrightarrow{AP} \parallel ((\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AP}) \times (\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}))$

$$\begin{aligned} & \text{又 } (\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AP}) \times (\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}) \\ &= (-2, 0, -4) \times (6, -10, -8) \\ &= \left(\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -10 & -8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -8 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 6 & -10 \end{vmatrix} \right) \\ &= (-40, -40, 20) \parallel (2, 2, -1) \end{aligned}$$

$$\text{且 } \overline{AP} = 6 = 2 \times \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} \therefore \overrightarrow{AP} = \pm(4, 4, -2)$$

$$\text{由 } \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (-5, 5, 5) \text{ 的方向，得 } \overrightarrow{AP} = (4, 4, -2)$$

$\therefore$ 此平行六面體體積為

$$\begin{aligned} |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AP}| &= |(-5, 5, 5) \cdot (4, 4, -2)| \\ &= |-20 + 20 - 10| = 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{同理，} (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}) \times (\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AP}) \\ &= (-5, 5, 5) \times (-2, 0, -4) \\ &= \left(\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & -5 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -5 & 5 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \right) \\ &= (-20, -30, 10) \parallel (2, 3, -1) \end{aligned}$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = s(2, 3, -1)$$

$$\begin{aligned} & \text{又 } (\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}) \times (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}) \\ &= (6, -10, -8) \times (-5, 5, 5) \\ &= \left(\begin{vmatrix} -10 & -8 \\ 5 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -8 & 6 \\ 5 & -5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 6 & -10 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} \right) \\ &= (-10, 10, -20) \parallel (1, -1, 2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = t(1, -1, 2)$$

$$\text{由 } \overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AP} = (-2, 0, -4), \text{ 得 } s(-2, 0, -4) = (-2, 0, -4)$$

$$\Rightarrow s = 1 \quad \therefore \overrightarrow{AD} = (2, 3, -1)$$

$$\text{由 } \overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB} = (6, -10, -8), \text{ 得 } t(6, -10, -8) = (6, -10, -8)$$

$$\Rightarrow t = 1 \quad \therefore \overrightarrow{AB} = (1, -1, 2)$$

$$\therefore \overrightarrow{AQ} = (5, 3, 0) \Rightarrow |\overrightarrow{AQ}| = \sqrt{5^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{34},$$

$$\overrightarrow{AC} = (3, 2, 1) \Rightarrow |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14},$$

$$\overrightarrow{AS} = (6, 7, -3) \Rightarrow |\overrightarrow{AS}| = \sqrt{6^2 + 7^2 + (-3)^2} = \sqrt{94},$$

$$\overrightarrow{AR} = (7, 6, -1) \Rightarrow |\overrightarrow{AR}| = \sqrt{7^2 + 6^2 + (-1)^2} = \sqrt{86}$$

比較以上向量長度，

可得平行六面體上距點 A 的最長距離為 $\overline{AS} = \sqrt{94}$

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為 a ，公比為 r ($r \neq 1$) 的等比數列前 n 項之和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

3. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑)

$\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

4. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$,

算術平均數 $\mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$

標準差 $\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1 - \mu_X)^2 + (x_2 - \mu_X)^2 + \dots + (x_n - \mu_X)^2]}$

$$= \sqrt{\frac{1}{n}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - n\mu_X^2}$$

5. 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$,

相關係數 $r_{X,Y} = \frac{(x_1 - \mu_X)(y_1 - \mu_Y) + (x_2 - \mu_X)(y_2 - \mu_Y) + \dots + (x_n - \mu_X)(y_n - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

迴歸直線 (最適合直線) 方程式 $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X)$

6. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$, $\sqrt{3} \approx 1.732$, $\sqrt{5} \approx 2.236$, $\sqrt{6} \approx 2.449$, $\pi \approx 3.142$

7. 對數值： $\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$, $\log 5 \approx 0.6990$, $\log 7 \approx 0.8451$