TOP

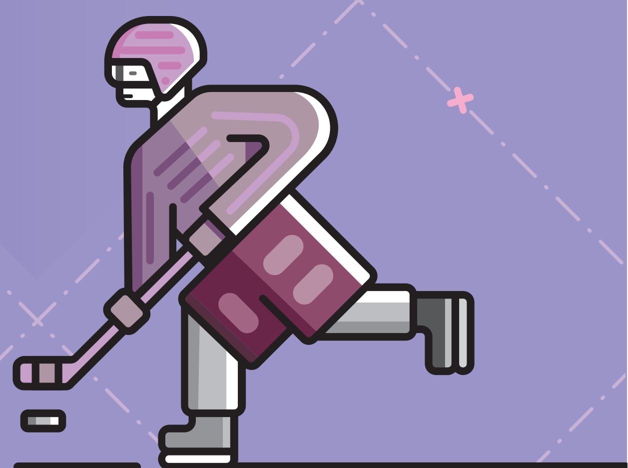
114學測

精彩解析

數學考科

❖臺中一中．李宜展 老師

大園高中．葉子榕 老師



總編輯／李心筠

企　編／高湘婷

責　編／吳崇欽．黃美甄．吳界

美　編／郭慧娟．歐詩妤．林素儀

出　版／民國一一四年二月

發行所／702008 臺南市新樂路76號

翰林官網https://www.hle.com.tw

本書內容同步刊載於翰林官網

00847-02

翰林 相信學習

試題分析 數學A考科

臺中一中／李宜展　老師

一、前　言

114 學年度的學測在 1 月 18 日～1 月 20 日舉辦，新式學測至今已舉辦到了第四年。在分析今年的學測數學 A 試題之前，我們先來回顧一下 111、112 及 113 學年度學測數學 A 試題的五標 (單位：級分)。

學年度	頂標	前標	均標	後標	底標
111	10	8	6	4	3
112	11	9	7	5	4
113	12	10	7	5	3

從上面表格可以看出，數學 A 考科的五標有逐年增加的趨勢，但仔細觀察原始分數，在 113 學年度數學 A 考科的頂標在 12 級分 (67.84 分～74.01 分)，考超過 86.34 分即能 15 級分，而 112 學年度的頂標在 11 級分 (63.75 分～70.12 分)，但需要考超過 89.25 分才能 15 級分。15 級分對應的原始分數其實是降低的，因此數學 A 考科仍屬於一份不容易的試題。以下筆者先利用表格呈現今年學測數學 A 的試題內容，如此便能讓讀者很清楚地看出此次考試內容。最後分析這次試題的特色，以作為老師們參考。

二、試題分布

<table>
<tr><th>冊別</th><th>單元</th><th>題型</th><th>難易度</th><th>分數合計</th><th>單冊合併計分</th></tr>
<tr><td rowspan="8">第一冊</td><td>第一章　數與式</td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="8">31 分</td></tr>
<tr><td>第二章　指數、對數</td><td>(多選 8)</td><td>中</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">第三章　多項式函數</td><td>多選 9</td><td>中</td><td>5 分</td></tr>
<tr><td>選填 13</td><td>易</td><td>5 分</td></tr>
<tr><td rowspan="4">第四章　直線與圓</td><td>單選 2</td><td>中偏易</td><td>5 分</td></tr>
<tr><td>多選 8</td><td>中</td><td>5 分</td></tr>
<tr><td>選填 16</td><td>中偏難</td><td>5 分</td></tr>
<tr><td>混合 20</td><td>中偏易</td><td>6 分</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>冊別</th><th>單元</th><th>題型</th><th>難易度</th><th>分數合計</th><th>單冊合併計分</th></tr>
<tr><td rowspan="5">第二冊</td><td>第一章　數列與級數</td><td>多選 7</td><td>中</td><td>5 分</td><td rowspan="5">20 分</td></tr>
<tr><td>第二章　數據分析</td><td>多選 12</td><td>中偏難</td><td>5 分</td></tr>
<tr><td>第三章　排列組合與機率</td><td>單選 3</td><td>中偏易</td><td>5分</td></tr>
<tr><td rowspan="2">第四章　三角比</td><td>(多選 11)</td><td>中</td><td></td></tr>
<tr><td>選填 17</td><td>難</td><td>5 分</td></tr>
<tr><td rowspan="6">第三冊 A</td><td rowspan="3">第一章　三角函數</td><td>單選 5</td><td>難</td><td>5 分</td><td rowspan="6">23 分</td></tr>
<tr><td>多選 10</td><td>中偏難</td><td>5 分</td></tr>
<tr><td>(選填 17)</td><td>難</td><td></td></tr>
<tr><td>第二章　指數與對數函數</td><td>單選 4</td><td>中偏難</td><td>5 分</td></tr>
<tr><td rowspan="2">第三章　平面向量</td><td>多選 11</td><td>中</td><td>5 分</td></tr>
<tr><td>混合 19</td><td>中</td><td>3 分</td></tr>
<tr><td rowspan="7">第四冊 A</td><td>第一章　空間向量</td><td>單選 6</td><td>難</td><td>5 分</td><td rowspan="7">26 分</td></tr>
<tr><td>第二章　空間中的平面與直線</td><td>選填 14</td><td>中</td><td>5 分</td></tr>
<tr><td rowspan="2">第三章　機率</td><td>單選 1</td><td>易</td><td>5 分</td></tr>
<tr><td>選填 15</td><td>中</td><td>5 分</td></tr>
<tr><td rowspan="3">第四章　矩陣</td><td>(選填 14)</td><td>中</td><td></td></tr>
<tr><td>混合 18</td><td>易</td><td>3 分</td></tr>
<tr><td>混合 19</td><td>中</td><td>3 分</td></tr>
</table>

(若題目有跨多個章節，但僅用到次要概念，則用括號表示，不計入分數合計)

由上表可看出此次學測與前三年的學測試題數相同，均為 20 題，題型維持單選題、多選題、選填題以及混合題組的型態，分別是 6 題 (30 %)、6 題 (30 %)、5 題 (25 %) 以及 3 小題 (15 %)。但就四冊的分散程度來說，此次學測偏重在第一冊，而內容上明顯偏重幾何部分 (占 5 成以上)。就難易度來說，難易度「中」以下的題目占了 6 成以上，整份試題難度約略和 113 學年度差不多。

三、試題特色

1. 選擇 (填) 題的基本題型不多：
往年都有一些考古題或常見題型，今年也有一些，但數量明顯變少。如單選 1 考獨立事件的定義，選填 13 連結除法原理及三次函數圖形的對稱中心，選填 15 考期望值的計算，這些算是平易近人的題目；單選 3 考的是簡單的排列組合，但考生要小心題目條件。這次的多選題沒有明顯的送分題，其中多選 7 的最後兩個選項都要仔細思考，而多選 8 雖然是直線與圓常見的題型，但包裝在指數方程式之下，且最後兩個選項也要花時間計算，這樣反而不容易拿下分數。

2. 素養情境題不多：
有別於 113 學測，今年的情境敘述比去年減少許多，除了常見的期望值情境外，要稱得上是素養情境的題目只有多選 12，但多選 12 的最後兩個選項也是考數學概念的選項。所以今年的題目難度不在於閱讀理解，反而回歸到純數學概念的理解及應用。回顧這四年學測，111 及 113 學測的素養情境題較多，112 及 114 學測則較少。這樣的趨勢下，明年情境題可能又再增多。

3. 多選題考概念及程序性知識居多：
今年多選題考概念及程序性知識為主，如多選 7 考遞迴數列，多選 8 考直線與圓的相交關係，多選 9 考二次函數的判別式，多選 10 考 112 學測曾出過的正弦函數圖形的對稱性，多選 11 考平面向量的分點公式及內積，多選 12 考標準差及迴歸直線 (最適直線) 的轉換，雖然沒有送分題，但題目的難度適中，這些都是屬於比較有鑑別度的題目。

4. 解方程式及不等式的題目變多：
以往筆者在檢討高三模擬考時，常遇到學生問的問題不是解題概念，而是在列出方程式後怎麼解方程式。今年的學測就出現了很多需要解方程式或不等式的題目，如單選 5 的三角函數不等式，多選 6、選填 14 及選填 16 的方程組，這代表平時練習題目累積計算功力是很重要的。

5. 偏重幾何內容：

 如同 113 學測的幾何內容達 5 成以上，這次的題目也是，而去年只出了 5 分的「直線與圓」單元，今年在這一單元的分數高達 21 分 (如單選 2，多選 8，選填 16 及混合 20)，可見這次出題教授的喜好。特別的是運用平面上點到直線距離及空間中點到平面距離公式出現多次。由此可見幾何內容，如三角比、向量、直線與圓、函數圖形這些概念都是考題的大宗，可作為未來準備的方向。

6. 鑑別高手題難度降低：

 前幾年在單選最後一題及選填最後兩題都有魔王題來鑑別高手，不過今年難題的難度降低，這對於努力的考生是一個很好的鼓勵，除了剛剛提到的單選 5，需要小心解出角的大小範圍，單選 6 則要掌握空間向量的長度，考生很容易陷入外積的思維而錯失方向；選填 16 得畫圖確認條件，列出方程式；而選填 17 算是此次較難的題目，需善用國中幾何及高中的三角比知識才能解決，這些都是判斷是否為高手的關鍵。而這些題目考的是數學概念的綜合統整能力，平時要克服面對難題的恐懼，勇於思考並解決問題，這樣才能變成高手中的高手。

7. 混合題組：

 前面提到基本題變少，但相較其他大考，混合題組簡單容易，大概是大考中心為了鼓勵考生書寫，而在最後的混合題組釋出善意。今年的混合題組同往年出現了三小題，其中兩小題需要學生手寫。不過除了混合 19 要書寫較多過程外，混合 18 算是送分的單選題，而混合 20 更是這份題目最容易拿的 6 分。用花不到前面三題選擇 (填) 題的時間就能拿到 15 分，對考生來說，今年的混合題組算是 CP 值很高的題目。

四、結　語

整體而言，此次基本的題型較少，但難題也沒以往難，可預見頂標或前標可能提高，但對於中後程度的學生來說並不是一份友善的試題。不論考生程度如何，混合題組一定要寫，有寫才有分數。再者，這兩年測驗的內容集中在幾何部分，未來複習時可以先將這些內容準備好。而今年沒有出現三角函數的疊合、空間中的直線方程式、算幾不等式、轉移矩陣、反方陣等，這些未出現的內容，也許是明年該注意的考點。

114學測 試題解析 數學A考科

臺中一中／李宜展　老師

第壹部分、選擇（填）題（占 85 分）

一、單選題（占 30 分）

說明：第 1. 題至第 6. 題，每題 5 分。

1. 不透明袋中有藍、綠色球各若干顆，且球上皆有 1 或 2 的編號，其顆數如下表，例如標有 1 號的藍色球有 2 顆。

	藍	綠
1 號	2	4
2 號	3	k

從此袋中隨機抽取一球 (每顆球被抽到的機率相等)，若已知抽到藍色球的事件與抽到 1 號球的事件互相獨立，試問 k 值為何？

(1) 2　(2) 3　(3) 4　(4) 5　(5) 6

答　　案：(5)

命題出處：第四冊 A 第三章　機率

測驗目標：獨立事件的定義

難 易 度：易

詳　　解：令抽到藍色球的事件為 A

抽到 1 號球的事件為 B

$\because A$ 與 B 互相獨立　$\therefore P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

即 $\dfrac{2}{9+k}=\dfrac{5}{9+k}\times\dfrac{6}{9+k}$

$\Rightarrow 2(9+k)^2=30(9+k)$

又 $9+k>0$，得 $9+k=15\Rightarrow k=6$

故選(5)

2. 坐標平面上，$P(a\,,0)$ 為 x 軸上一點，其中 $a>0$。令 L_1、L_2 為通過 P 點，斜率分別為 $-\dfrac{4}{3}$、$-\dfrac{3}{2}$ 的直線。已知 L_1、L_2 分別與兩坐標軸圍成的兩個直角三角形的面積差為 3，試問 a 值為何？

(1) $3\sqrt{2}$　(2) 6　(3) $6\sqrt{2}$　(4) 9　(5) $8\sqrt{2}$

答　　案：(2)

命題出處：第一冊第四章　直線與圓

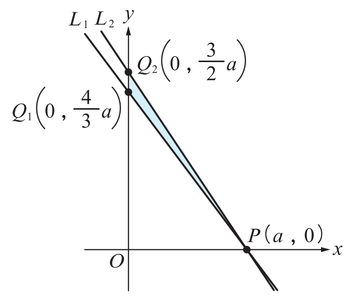
測驗目標：斜率的應用

難 易 度：中偏易

詳　　解：由 L_1、L_2 的斜率，且皆通過 $P(a,0)$ 可知

L_1 交 y 軸於 $Q_1\left(0,\dfrac{4}{3}a\right)$，$L_2$ 交 y 軸於 $Q_2\left(0,\dfrac{3}{2}a\right)$

如右圖



又 L_1、L_2 分別與兩坐標軸圍成的兩個直角三角形的面積差為 3

$\therefore \dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{3}{2}a-\dfrac{4}{3}a\right)\times a=3$

$\Rightarrow \dfrac{a^2}{12}=3 \Rightarrow a^2=36 \Rightarrow a=\pm 6$ (負不合)

故選(2)

3. 某校舉辦音樂會，包含鋼琴表演 5 個、小提琴表演 4 個、歌唱表演 3 個等三類表演共 12 個不同曲目。該校想將同類表演排在一起，且歌唱必須排在鋼琴之後或是小提琴之後。試問這場音樂會可能的曲目排列方式共有幾種？
(1) $5!\times4!\times3!$
(2) $2\times5!\times4!\times3!$
(3) $3\times5!\times4!\times3!$
(4) $4\times5!\times4!\times3!$
(5) $6\times5!\times4!\times3!$

答　　案：(4)

命題出處：第二冊第三章　排列組合與機率

測驗目標：理解排列的原理

難 易 度：中偏易

詳　　解：類別排序的可能數有 $\underset{\text{鋼琴或小提琴}}{\underset{\downarrow}{2}}\times\underset{\text{剩2類選1類}}{\underset{\downarrow}{2}}\times\underset{\text{剩1類}}{\underset{\downarrow}{1}}=4$ 種

因此可能的曲目排列方式共有 $4\times5!\times4!\times3!$ 種

故選(4)

4. 坐標平面上，x 坐標與 y 坐標均為整數的點稱為格子點。試問在函數圖形 $y=\log_2 x$、x 軸與直線 $x=\dfrac{61}{2}$ 所圍有界區域的內部 (不含邊界) 共有多少個格子點？

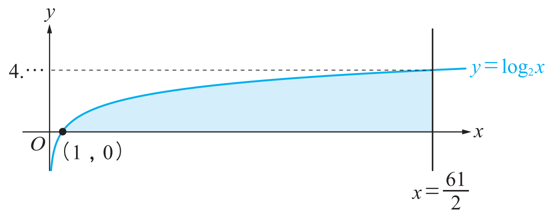
(1) 88　(2) 89　(3) 90　(4) 91　(5) 92

答　　案：(3)

命題出處：第三冊 A 第二章　指數與對數函數

測驗目標：對數函數圖形及對數定義的綜合應用

難 易 度：中偏難



詳　　解：所求區域即為 $\begin{cases} 1<x<\dfrac{61}{2} \\ 0<y<\log_2 x \\ x，y\in\mathbb{N} \end{cases}$

當 $y=1$ 時，$2<x<\dfrac{61}{2}\Rightarrow x=3，4，\cdots\cdots，30$，共 28 個

$y=2$ 時，$4<x<\dfrac{61}{2}\Rightarrow x=5，6，\cdots\cdots，30$，共 26 個

$y=3$ 時，$8<x<\dfrac{61}{2}\Rightarrow x=9，10，\cdots\cdots，30$，共 22 個

$y=4$ 時，$16<x<\dfrac{61}{2}\Rightarrow x=17，18，\cdots\cdots，30$，共 14 個

共 $28+26+22+14=90$ 個格子點，故選(3)

5. 設 $0\leq\theta\leq 2\pi$。已知所有滿足 $\sin 2\theta>\sin\theta$ 且 $\cos 2\theta>\cos\theta$ 的 θ 可表為 $a\pi<\theta<b\pi$，其中 a，b 為實數，試問 $b-a$ 值為何？

(1) $\dfrac{1}{3}$　(2) $\dfrac{1}{2}$　(3) $\dfrac{2}{3}$　(4) $\dfrac{3}{4}$　(5) 1

答　　案：(1)

命題出處：第三冊 A 第一章　三角函數

測驗目標：結合二倍角公式解三角函數不等式

難 易 度：難

詳　　解：由 $\cos 2\theta>\cos\theta$ 可得 $2\cos^2\theta-1>\cos\theta$

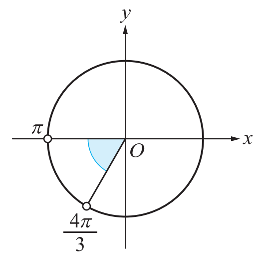
$\Rightarrow 2\cos^2\theta-\cos\theta-1>0\Rightarrow(2\cos\theta+1)(\cos\theta-1)>0$

$\therefore\cos\theta>1$ (不合) 或 $\cos\theta<-\dfrac{1}{2}$ ……………①

又 $\sin 2\theta>\sin\theta\Rightarrow 2\sin\theta\cos\theta>\sin\theta\Rightarrow\sin\theta(2\cos\theta-1)>0$

$\therefore\begin{cases}\sin\theta>0\\ \cos\theta>\dfrac{1}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\sin\theta<0\\ \cos\theta<\dfrac{1}{2}\end{cases}$ ……………………②

綜合①、②可知$\begin{cases}\sin\theta<0\\ -1<\cos\theta<-\dfrac{1}{2}\end{cases}$



即 $\pi<\theta<\dfrac{4}{3}\pi$，得 $a=1$，$b=\dfrac{4}{3}$

$\therefore b-a=\dfrac{4}{3}-1=\dfrac{1}{3}$

故選(1)

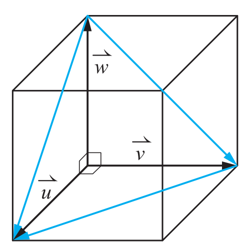
6. 坐標空間中有三個彼此互相垂直之向量 $\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$，$\overrightarrow{w}$。已知 $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}=(2,-1,0)$，且 $\overrightarrow{v}-\overrightarrow{w}=(-1,2,3)$。試問由 $\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$，$\overrightarrow{w}$ 所張出的平行六面體之體積為何？
(1) $2\sqrt{5}$
(2) $5\sqrt{2}$
(3) $2\sqrt{10}$
(4) $4\sqrt{5}$
(5) $4\sqrt{10}$

答　　案：(3)
命題出處：第四冊 A 第一章　空間向量
測驗目標：空間向量的應用
難 易 度：難
詳　　解：$\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}=(2,-1,0)$，$\overrightarrow{v}-\overrightarrow{w}=(-1,2,3)$

$\Rightarrow \overrightarrow{u}-\overrightarrow{w}=(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})+(\overrightarrow{v}-\overrightarrow{w})=(1,1,3)$

$\because$三向量彼此互相垂直

$\therefore \begin{cases}|\overrightarrow{u}|^2+|\overrightarrow{v}|^2=|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}|^2=5\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}\\ |\overrightarrow{v}|^2+|\overrightarrow{w}|^2=|\overrightarrow{v}-\overrightarrow{w}|^2=14\ \cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}\\ |\overrightarrow{u}|^2+|\overrightarrow{w}|^2=|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{w}|^2=11\ \cdots\cdots\cdots\cdots\text{③}\end{cases}$



由①+②+③得 $2(|\overrightarrow{u}|^2+|\overrightarrow{v}|^2+|\overrightarrow{w}|^2)=30$

$\Rightarrow |\overrightarrow{u}|^2+|\overrightarrow{v}|^2+|\overrightarrow{w}|^2=15\ \cdots\cdots\cdots\cdots\text{④}$

由④－①，④－②，④－③可得 $|\overrightarrow{w}|^2=10$，$|\overrightarrow{u}|^2=1$，$|\overrightarrow{v}|^2=4$

$\therefore$由 $\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$，$\overrightarrow{w}$ 所張出的平行六面體體積為

$|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}||\overrightarrow{w}|=\sqrt{|\overrightarrow{u}|^2|\overrightarrow{v}|^2|\overrightarrow{w}|^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

故選(3)

二、多選題（占 30 分）

說明：第 7. 題至第 12. 題，每題 5 分。

7. 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $3a_{n+1}=a_n+n$（對任意正整數 n 都成立）且 $a_1=2$。令數列 $\langle b_n \rangle$ 滿足 $b_n=a_n-\dfrac{n}{2}+\dfrac{3}{4}$。試選出正確的選項。

(1) $a_2=2$

(2) $b_2=\dfrac{3}{4}$

(3)數列 $\langle b_n \rangle$ 是公比為 $\dfrac{2}{3}$ 的等比數列

(4)對於任意正整數 n，$3^n a_n$ 皆為正整數

(5) $b_{10}<10^{-4}$

答　　案：(2)(4)

命題出處：第二冊第一章　數列與級數

測驗目標：遞迴數列的應用

難 易 度：中

詳　　解：(1) ╳：$3a_2=a_1+1=3 \quad \therefore a_2=1$

(2) ○：$b_2=a_2-\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{4}=1-1+\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{4}$

(3) ╳：$b_{n+1}=a_{n+1}-\dfrac{n+1}{2}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{3}(a_n+n)-\dfrac{n+1}{2}+\dfrac{3}{4}$

$$=\frac{a_n}{3}-\frac{n}{6}+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}\left(a_n-\frac{n}{2}+\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{3}b_n$$

即 $\langle b_n \rangle$ 是公比為 $\dfrac{1}{3}$ 的等比數列

(4) ○：由 $3a_{n+1}=a_n+n$

可得 $3^{n+1}a_{n+1}=3^n a_n+3^n \cdot n$

令 $c_n=3^n a_n$，又 $c_1=3a_1=6$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_{n+1}=c_n+3^n \cdot n \\ c_1=6 \end{cases}$$

可得對於任意正整數 n，$c_n=3^n a_n$ 皆為正整數

(5) ╳：$b_1=a_1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}=2-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{9}{4}$

又公比 $r=\dfrac{1}{3}$

$$\therefore b_{10}=b_1 \cdot r^9=\frac{9}{4} \cdot \frac{1}{3^9}=\frac{1}{4 \cdot 3^7}=\frac{1}{8748}>\frac{1}{10000}=10^{-4}$$

故選(2)(4)

8. 考慮坐標平面上滿足方程式 $\dfrac{2^{x^2}}{8}=\dfrac{4^x}{2^{y^2}}$ 的點 $P(x\,,y)$，試選出正確的選項。

(1)當 $x=3$ 時，滿足此方程式的解有相異 2 個

(2)若點 $(a\,,b)$ 滿足此方程式，則點 $(-a\,,-b)$ 也滿足此方程式

(3)所有可能的點 $P(x\,,y)$ 構成的圖形為一個圓

(4)點 $P(x\,,y)$ 可能在直線 $x+y=4$ 上

(5)對於所有可能的點 $P(x\,,y)$，其 $x-y$ 的最大值為 $1+2\sqrt{2}$

答　　案：(3)(5)

命題出處：第一冊第二章　指數、對數、第一冊第四章　直線與圓

測驗目標：結合指數運算及圓方程式的綜合應用

難 易 度：中

詳　　解：由 $\dfrac{2^{x^2}}{8}=\dfrac{4^x}{2^{y^2}}$ 可得 $2^{x^2}\cdot 2^{y^2}=8\cdot 4^x$

即 $2^{x^2+y^2}=2^{3+2x}$，由底數皆為 2 可得 $x^2+y^2=3+2x$

配方得 $(x-1)^2+y^2=4$ 為一圓方程式，其圓心 $C(1\,,0)$，半徑 $r=2$

故滿足方程式所有可能的點 P 構成的圖形為一圓

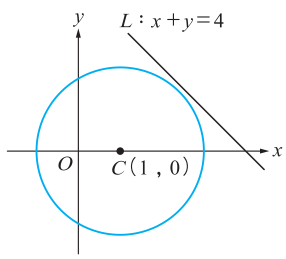
(1) ╳：當 $x=3$ 時，$4+y^2=4\Rightarrow y=0$

僅有一解 $(3\,,0)$

(2) ╳：承(1)，點 $(3\,,0)$ 滿足此方程式，但點 $(-3\,,0)$ 不滿足

(3) ○

(4) ╳：



令 $L：x+y=4$，$d(C\,,L)=\dfrac{|1+0-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}>2=r$

∴直線 L 和圓不相交，因此 $P(x\,,y)$ 不可能在直線 $x+y=4$ 上

(5) ○：令 $M：x-y=k$

若直線 M 和圓相交，則 $d(C\,,M)\leq r=2$

$\Rightarrow \dfrac{|1-0-k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\leq 2$

$\Rightarrow |k-1|\leq 2\sqrt{2}\Rightarrow -2\sqrt{2}\leq k-1\leq 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow 1-2\sqrt{2}\leq k\leq 1+2\sqrt{2}$

故 $x-y$ 的最大值為 $1+2\sqrt{2}$

故選(3)(5)

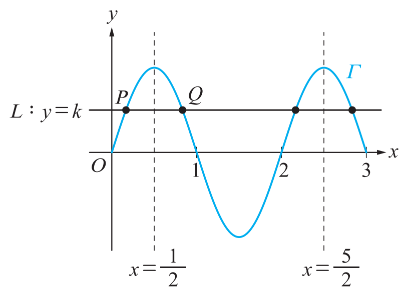
9. 設 b、c 為實數。已知二次方程式 $x^2+bx+c=0$ 有實根，但二次方程式 $x^2+(b+2)x+c=0$ 沒有實根。試選出正確的選項。
(1) $c<0$
(2) $b<0$
(3) $x^2+(b+1)x+c=0$ 有實根
(4) $x^2+(b+2)x-c=0$ 有實根
(5) $x^2+(b-2)x+c=0$ 有實根

答　　案：(2)(4)(5)
命題出處：第一冊第三章　多項式函數
測驗目標：二次函數的應用
難 易 度：中
詳　　解：(1) ╳：$\because x^2+(b+2)x+c=0$ 沒有實根
$\therefore (b+2)^2-4c<0 \Rightarrow (b+2)^2<4c$ ……………①
又 $x^2+bx+c=0$ 有實根
$\therefore b^2-4c\geq 0 \Rightarrow b^2\geq 4c$……………………………②
由①、②得 $(b+2)^2<4c\leq b^2$
$\therefore c>0$
(2) ○：承(1)，由 $(b+2)^2<4c\leq b^2$ 可知
$(b+2)^2<b^2 \Rightarrow 4b+4<0 \Rightarrow b<-1$
$\therefore b<0$
(3) ╳：不一定，當 $b=-3$，$c=2$ 時
$(b+1)^2-4c=4-8<0$
$\Rightarrow x^2+(b+1)x+c=0$ 沒有實根
但當 $b=-3$，$c=1$ 時
$(b+1)^2-4c=4-4=0$
$\Rightarrow x^2+(b+1)x+c=0$ 有實根
(4) ○：$(b+2)^2-4\cdot(-c)=(b+2)^2+4c>0$
$\Rightarrow x^2+(b+2)x-c=0$ 有實根
(5) ○：$(b-2)^2-4c\geq(b-2)^2-b^2$ $(\because b^2\geq 4c)$
$=-4b+4>0$ $(\because b<0)$
$\Rightarrow x^2+(b-2)x+c=0$ 有實根
故選(2)(4)(5)

10. 令 Γ 為坐標平面上 $y=\sin \pi x$ 在 $0\leq x\leq 3$ 內之函數圖形。一水平直線 L：$y=k$ 與 Γ 相交，其中三交點 $P(x_1, k)$，$Q(x_2, k)$，$R(x_3, k)$ 滿足 $x_1<x_2<1<x_3$。試選出正確的選項。
(1) $k>0$
(2) L 與 Γ 恰有 3 個交點
(3) $x_1+x_2<1$
(4)若 $2\overline{PQ}=\overline{QR}$，則 $k=\frac{1}{2}$
(5) L 與 Γ 所有交點的 x 坐標之和大於 5

答　　案：(1)(4)(5)
命題出處：第三冊 A 第一章　三角函數
測驗目標：正弦函數圖形的性質
難 易 度：中偏難
詳　　解：(1) ○：當 $k<0$ 時，L 與 Γ 至多兩個交點 (不合)
$k=0$ 時，$x_1=0$，$x_2=1$ (不合)
$\therefore k>0$

(2) ╳：如右圖，L 與 Γ 恰有 4 個交點



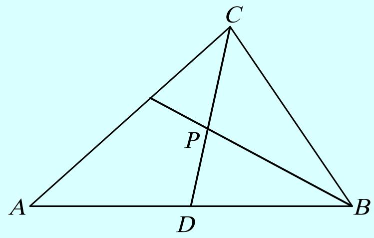
(3) ╳：$\because P$、Q 兩點對稱於 $x=\frac{1}{2}$
$\therefore x_1+x_2=2\times\frac{1}{2}=1$

(4) ○：由 $y=\sin \pi x$ 的週期為 $\frac{2\pi}{\pi}=2$，可知有以下兩種可能：
① $x_3=x_1+2$，又 $x_2=1-x_1$
利用 $2\overline{PQ}=\overline{QR}$
$\Rightarrow 2(1-x_1-x_1)=(x_1+2)-(1-x_1)$
$\Rightarrow 2-4x_1=2x_1+1 \Rightarrow x_1=\frac{1}{6}$，$x_2=\frac{5}{6}$
即 $k=\sin\frac{\pi}{6}=\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$
② $x_3=x_2+2$，即 $x_3-x_2=2$
又 $x_2=1-x_1$
同理可得 $2(1-x_1-x_1)=2$
$\Rightarrow 2-4x_1=2 \Rightarrow x_1=0$，$x_2=1$ (不合)
故 $k=\frac{1}{2}$

(5) ○：除了 P，Q 外，其他兩交點對稱於 $x=\frac{5}{2}$
因此所有交點的 x 坐標之和為 $2\times\frac{1}{2}+2\times\frac{5}{2}=6>5$

故選(1)(4)(5)

11. 在 $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=6$，$\overline{AC}=5$，$\overline{BC}=4$。令 $\overline{AB}$ 中點為 D，P 為 $\angle ABC$ 之角平分線與 $\overline{CD}$ 之交點，如右圖所示。試選出正確的選項。



(1) $\overline{CP}=\dfrac{3}{7}\overline{CD}$

(2) $\overrightarrow{AP}=\dfrac{3}{7}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{7}\overrightarrow{AC}$

(3) $\cos\angle BAC=\dfrac{3}{4}$

(4) $\triangle ACP$ 面積為 $\dfrac{15}{14}\sqrt{7}$

(5) (內積) $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{120}{7}$

答　　案：(3)(4)(5)

命題出處：第二冊第四章　三角比、第三冊 A 第三章　平面向量

測驗目標：三角形面積公式、平面向量的線性組合與內積運算

難 易 度：中

詳　　解：(1) ╳：$\because \angle CBP=\angle PBD$

$\therefore \overline{CP}:\overline{PD}=\overline{BC}:\overline{BD}=4:3$

$\Rightarrow \overline{CP}=\dfrac{4}{7}\overline{CD}$

(2) ╳：承(1)，$\overrightarrow{AP}=\dfrac{4}{7}\overrightarrow{AD}+\dfrac{3}{7}\overrightarrow{AC}=\dfrac{4}{7}\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)+\dfrac{3}{7}\overrightarrow{AC}=\dfrac{2}{7}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{7}\overrightarrow{AC}$

(3) ○：$\cos\angle BAC=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{AC}}=\dfrac{6^2+5^2-4^2}{2\times6\times5}=\dfrac{3}{4}$

(4) ○：承(3)，$\sin\angle BAC=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

$\therefore \triangle ACD$ 面積為 $\dfrac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{AD}\times\sin\angle BAC=\dfrac{1}{2}\times5\times3\times\dfrac{\sqrt{7}}{4}=\dfrac{15\sqrt{7}}{8}$

故 $\triangle ACP$ 面積為 $\dfrac{4}{7}\times\triangle ACD$ 面積 $=\dfrac{4}{7}\times\dfrac{15\sqrt{7}}{8}=\dfrac{15\sqrt{7}}{14}$

(5) ○：$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\dfrac{2}{7}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{7}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AC}$

$=\dfrac{2}{7}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\dfrac{3}{7}|\overrightarrow{AC}|^2$

$=\dfrac{2}{7}\times6\times5\times\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{7}\times5^2=\dfrac{120}{7}$

故選(3)(4)(5)

12. 某種合金由甲和乙兩種金屬組成，某生想知道其中金屬比例與合金的波長關係。他做實驗測量「甲占比為 x %的合金所對應的波長 y (單位：奈米)」，並將得到的 20 筆數據 (x_k, y_k)，$k=1$，……，20，在 xy 平面上標出對應的點，其迴歸直線 (最適直線) 為 $y=21.3x-40$。為符合投稿規範，須將報告描述為「乙占比為 u %的合金所對應的波長 v (單位：微米)」，他將數據 (x_k, y_k) 轉換為 (u_k, v_k)，$k=1$，……，20，得到在 uv 平面的迴歸直線為 $v=au+b$。已知 1 奈米$=10^{-9}$ 公尺，1 微米$=10^{-6}$ 公尺。試選出正確的選項。
(1) $u_k=100-x_k$，$k=1$，……，20
(2) $v_k=1000y_k$，$k=1$，……，20
(3) u_1，u_2，u_3，……，u_{20} 的標準差等於 x_1，x_2，x_3，……，x_{20} 的標準差
(4) $b=2.09$
(5)某生發現有另一筆數據 (u_{21}, v_{21})，且滿足 $v_{21}=au_{21}+b$；若將這 21 筆數據(u_k, v_k)，$k=1$，……，21，在 uv 平面上標出對應的點，則其迴歸直線仍為 $v=au+b$

答　　案：(1)(3)(4)(5)

命題出處：第二冊第二章　數據分析

測驗目標：理解最適直線與平均數、標準差的關係

難 易 度：中偏難

詳　　解：(1) ○：由 $x+u=100$

$\therefore u_k=100-x_k$，$k=1$，……，20

(2) ╳：y 奈米$=v$ 微米

$\Rightarrow y\times10^{-9}$ 公尺$=v\times10^{-6}$ 公尺

$\Rightarrow y=1000v$

$\therefore y_k=1000v_k$，$k=1$，……，20

(3) ○：由 $u_k=100-x_k$

$\therefore u_1$，u_2，u_3，……，u_{20} 的標準差 σ_u 等於 x_1，x_2，x_3，……，x_{20} 的標準差 σ_x

(4) ○：$y-\mu_y=r_{x,y}\cdot\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x)$ 即為 $y=21.3x-40$

$\Rightarrow r_{x,y}\cdot\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}=21.3$，且 $\mu_y-21.3\mu_x=-40$

$v-\mu_v=r_{u,v}\cdot\dfrac{\sigma_v}{\sigma_u}(u-\mu_u)$ 即為 $v=au+b$

其中 $a=r_{u,v}\cdot\dfrac{\sigma_v}{\sigma_u}=-r_{x,y}\cdot\dfrac{\frac{1}{1000}\sigma_y}{\sigma_x}$

$=-\dfrac{21.3}{1000}=-0.0213$

$b=\mu_v+0.0213\mu_u$

$=\dfrac{1}{1000}\mu_y+0.0213(100-\mu_x)$

$=\dfrac{1}{1000}(\mu_y-21.3\mu_x+2130)$

$=\dfrac{1}{1000}(-40+2130)=2.09$

〈另解〉

將 $x=100-u$，$y=1000v$ 代入 $y=21.3x-40$

得 $1000v=21.3(100-u)-40$

即 $v=-0.0213u+2.09$ $\therefore b=2.09$

(5) ○：由最小平方法的定義

$D=(v_1-pu_1-q)^2+(v_2-pu_2-q)^2+\cdots\cdots+(v_{20}-pu_{20}-q)^2$

在 $p=a$，$q=b$ 時有最小值

因此 $D'=D+(v_{21}-pu_{21}-q)^2$

$=D+(au_{21}+b-pu_{21}-q)^2\geq D$

即 D' 在 $p=a$，$q=b$ 時有最小值，故迴歸直線仍為 $v=au+b$

故選(1)(3)(4)(5)

三、選填題（占 25 分）

說明：第 13. 題至第 17. 題，每題 5 分。

13. 已知實係數三次多項式 $f(x)$ 除以 $x+6$ 得商式 $q(x)$ 和餘式 3。若 $q(x)$ 在 $x=-6$ 有最大值 8，則 $y=f(x)$ 圖形的對稱中心坐標為 ___(13-1 13-2 , 13-3)___。

答　　案：$(-6\,,3)$

命題出處：第一冊第三章　多項式函數

測驗目標：結合除法原理及三次函數圖形的對稱中心

難 易 度：易

詳　　解：由 $q(x)$ 在 $x=-6$ 有最大值 8

可令 $q(x)=a(x+6)^2+8$ $(a<0)$

$\therefore f(x)=(x+6)q(x)+3$

$=(x+6)〔a(x+6)^2+8〕+3$

$=a(x+6)^3+8(x+6)+3$

故 $y=f(x)$ 圖形的對稱中心坐標為 $(-6\,,3)$

14. 坐標空間中，已知點 A 的坐標為 (a,b,c)，其中 a，b，c 皆為小於 0 的實數，且知點 A 與三平面 E_1：$4y+3z=2$、E_2：$3y+4z=-5$、E_3：$x+2y+2z=-2$ 的距離都是 6，則

$a+b+c=$ ___14-1 14-2 14-3___ 。

答　　案：-11

命題出處：第四冊 A 第二章　空間中的平面與直線、第四冊 A 第四章　矩陣

測驗目標：點到平面的距離及聯立方程式的應用

難 易 度：中

詳　　解：由題意可得

$$\begin{cases} \dfrac{|4b+3c-2|}{\sqrt{4^2+3^2}}=6 \\ \dfrac{|3b+4c+5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=6 \\ \dfrac{|a+2b+2c+2|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |4b+3c-2|=30 \\ |3b+4c+5|=30 \\ |a+2b+2c+2|=18 \end{cases}$$

得 $\begin{cases} 4b+3c=32 \text{ 或} -28 \\ 3b+4c=25 \text{ 或} -35 \\ a+2b+2c=16 \text{ 或} -20 \end{cases}$

但 a，b，c 皆為小於 0 的實數

$\therefore \begin{cases} 4b+3c=-28 \cdots\cdots\cdots\cdots① \\ 3b+4c=-35 \cdots\cdots\cdots\cdots② \\ a+2b+2c=-20 \cdots\cdots\cdots\cdots③ \end{cases}$

由①＋②得 $7(b+c)=-63$

$\Rightarrow b+c=-9$ 代入③得 $a=-2$

故 $a+b+c=-11$

15. 假日市集有個攤位推出「試試手氣，定價 480 元的可愛玩偶最低只要 240 元」。規則為：顧客投擲一枚均勻硬幣至多 5 次，前 3 次連續擲得 3 個正面者則只能以 240 元購得一個玩偶，擲到第 4 次才累積得 3 個正面者則只能以 320 元購得一個，擲到第 5 次才累積得 3 個正面者則只能以 400 元購得一個；5 次投完仍未累積 3 個正面者則只能以 480 元購得一個。

參與此遊戲的顧客購得一個玩偶所花金額的期望值為 ___15-1 15-2 15-3___ 元。

答　　案：405

命題出處：第四冊 A 第三章　機率

測驗目標：獨立事件及期望值

難 易 度：中

詳　　解：如下表：

金額 (元)	240	320	400	480
機率	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4\times C_2^3$	$\left(\frac{1}{2}\right)^5\times C_2^4$	$1-\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{2}\right)^4\times C_2^3-\left(\frac{1}{2}\right)^5\times C_2^4$

所求為 $240\times\frac{1}{8}+320\times\frac{3}{16}+400\times\frac{3}{16}+480\times\left(1-\frac{1}{8}-\frac{3}{16}-\frac{3}{16}\right)$

$=30+60+75+240$

$=405$ (元)

16. 坐標平面上，設 L_1、L_2 為通過點 $(3\,,1)$ 且斜率分別為 m、$-m$ 的兩條直線，其中 m 為一實數。另設 Γ 為圓心在原點的一個圓。已知 Γ 與 L_1 交於相異兩點 A、B，且知圓心到 L_1 的距離為 1，又 Γ 與 L_2 相切，則弦 $\overline{AB}$ 的長度為 $\frac{(16\text{-}1)(16\text{-}2)}{(16\text{-}3)}$ 。(化為最簡分數)

答　　案：$\frac{24}{5}$

命題出處：第一冊第四章　直線與圓

測驗目標：直線與圓的綜合應用

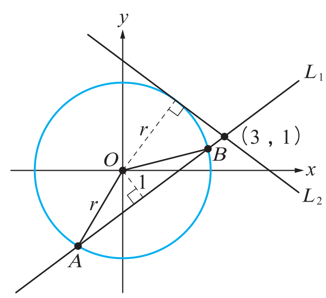
難 易 度：中偏難

詳　　解：令圓 Γ：$x^2+y^2=r^2$

L_1：$y-1=m(x-3)$，即 L_1：$mx-y-3m+1=0$

L_2：$y-1=-m(x-3)$，即 L_2：$mx+y-3m-1=0$

由題意可知



$$\begin{cases}\dfrac{|-3m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ \dfrac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+1^2}}=r \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②\end{cases}$$

由①得 $9m^2-6m+1=m^2+1$

$\Rightarrow 8m^2-6m=0 \Rightarrow 2m(4m-3)=0$

$\Rightarrow m=\frac{3}{4}$ 或 0 (不合)

代入②得 $r=\dfrac{\left|\frac{-9}{4}-1\right|}{\sqrt{\frac{9}{16}+1}}=\frac{13}{5}$

故 $\overline{AB}=2\sqrt{r^2-1^2}=2\sqrt{\frac{169}{25}-1}=\frac{24}{5}$

17. $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB}=\overline{BC}=3$，$\cos\angle ABC=-\frac{1}{8}$。在$\triangle ABC$ 的外接圓上有一點 D 滿足 $\overline{BD}=4$，且 $\overline{AD}\leq\overline{CD}$，則 $\overline{CD}=$ ___(17-1) $+\sqrt{(17\text{-}2)}$___。(化為最簡根式)

答　　案：$3+\sqrt{2}$

命題出處：第二冊第四章　三角比、第三冊 A 第一章　三角函數

測驗目標：結合三角比與半角公式的應用

難 易 度：難

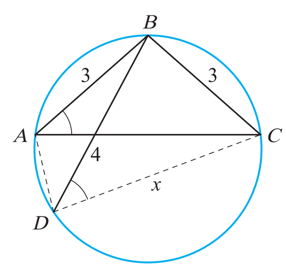
詳　　解：在$\triangle ABC$ 中，由 $\overline{AB}=\overline{BC}=3$，且 $\cos\angle ABC=-\frac{1}{8}<0$ 可知

$\angle BAC=\angle BCA$，且 $\angle ABC$ 為鈍角

$$\therefore\cos\angle BAC=\cos\left(\frac{180^\circ-\angle ABC}{2}\right)=\cos\left(90^\circ-\frac{1}{2}\angle ABC\right)=\sin\left(\frac{1}{2}\angle ABC\right)=\sqrt{\frac{1-\cos\angle ABC}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{8}}{2}}=\frac{3}{4}$$

在$\triangle BCD$ 中，令 $\overline{CD}=x$

由餘弦定理及 $\cos\angle BAC=\cos\angle BDC$ 得



$$\frac{3}{4}=\frac{4^2+x^2-3^2}{2\cdot 4\cdot x}$$

$\Rightarrow 4(7+x^2)=3\cdot 8x$

$\Rightarrow x^2-6x+7=0$

$\Rightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{36-28}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{8}}{2}=3\pm\sqrt{2}$

$\because\angle ADB=\angle BCA=\angle BAC$

在$\triangle ABD$ 中，同理可得 $\overline{AD}=3\pm\sqrt{2}$

但 $\overline{AD}\leq\overline{CD}$

故 $\overline{CD}=3+\sqrt{2}$ (此時 $\overline{AD}=3-\sqrt{2}$)

第貳部分、混合題或非選擇題（占 15 分）

說明：本部分共有 1 題組，單選題每題 3 分，非選擇題配分標於題末。限在答題卷標示題號的作答區內作答。選擇 (填) 題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶 (液)。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

18－20 題為題組

已知 $A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$ 皆為坐標平面上以原點 O 為中心，逆時針旋轉一銳角的旋轉矩陣，且滿足 $A^2=B^3=\begin{bmatrix} 0 & c \\ 1 & d \end{bmatrix}$，其中 c，d 為實數。

設點 $P(1\ ,1)$ 經 A^3 變換後為點 Q，且點 Q 經 B^4 變換後為點 R。根據上述，試回答下列問題。

18. 試問 c 之值為何？(單選題，3 分)

(1) 0　(2) -1　(3) 1　(4) $-\frac{1}{2}$　(5) $\frac{1}{2}$

答　　案：(2)
命題出處：第四冊 A 第四章　矩陣
測驗目標：旋轉矩陣的運算
難 易 度：易
詳　　解：令 $A=\begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}$

$A^2=\begin{bmatrix} \cos 2\theta_1 & -\sin 2\theta_1 \\ \sin 2\theta_1 & \cos 2\theta_1 \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} 0 & c \\ 1 & d \end{bmatrix}$

$\because \cos 2\theta_1=0$，$\sin 2\theta_1=1$

$\therefore c=-\sin 2\theta_1=-1$，$d=0$

故選(2)

19. 試求點 Q 的坐標，以及 $\overrightarrow{OR}$ 與向量 $(1\ ,0)$ 的夾角。(非選擇題，6 分)

答　　案：點 Q 坐標為 $(-\sqrt{2}\ ,0)$，60°
命題出處：第三冊 A 第三章　平面向量、第四冊 A 第四章　矩陣
測驗目標：結合旋轉矩陣與平面向量的應用
難 易 度：中

詳　　解：令 $A=\begin{bmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}\cos\theta_2 & -\sin\theta_2\\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2\end{bmatrix}$

承 18.，$\begin{cases}\cos 2\theta_1=0\\ \sin 2\theta_1=1\\ 0<\theta_1<90^\circ\end{cases} \Rightarrow 2\theta_1=90^\circ \Rightarrow \theta_1=45^\circ$

$\therefore A=\begin{bmatrix}\cos 45^\circ & -\sin 45^\circ\\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ\end{bmatrix}$

$\Rightarrow A^3=\begin{bmatrix}\cos 135^\circ & -\sin 135^\circ\\ \sin 135^\circ & \cos 135^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$

同理，$B^3=\begin{bmatrix}\cos 3\theta_2 & -\sin 3\theta_2\\ \sin 3\theta_2 & \cos 3\theta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{cases}\cos 3\theta_2=0\\ \sin 3\theta_2=1\\ 0<\theta_2<90^\circ\end{cases} \Rightarrow 3\theta_2=90^\circ \Rightarrow \theta_2=30^\circ$

$\therefore B=\begin{bmatrix}\cos 30^\circ & -\sin 30^\circ\\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ\end{bmatrix}$

$\Rightarrow B^4=\begin{bmatrix}\cos 120^\circ & -\sin 120^\circ\\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

故 Q 點坐標為 $\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sqrt{2}\\ 0\end{bmatrix}$，即 $Q(-\sqrt{2},0)$

R 點坐標為 $\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\sqrt{2}\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{6}}{2}\end{bmatrix}$，即 $R\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

令 $\overrightarrow{u}=(1,0)$ 且 $\overrightarrow{OR}$ 和 $\overrightarrow{u}$ 夾角為 θ

則 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{OR}||\overrightarrow{u}|}=\dfrac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\cdot(1,0)}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}\sqrt{1^2+0^2}}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\theta=60^\circ$

故點 Q 坐標為 $(-\sqrt{2},0)$，且所求夾角為 60°

20. 設 L 為過點 P 且與直線 OQ 平行的直線，點 S 為 L 和直線 OR 的交點，試求 $\angle OSP$，並求點 S 的坐標。(非選擇題，6 分)

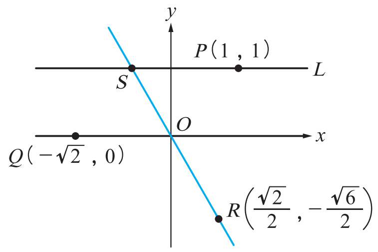
答　　案：$\angle OSP=60^\circ$，點 S 坐標為 $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$

命題出處：第一冊第四章　直線與圓

測驗目標：直線的斜率

難 易 度：中偏易

詳　　解：



如上圖，L：$y=1$，且 $\angle OSP=\overrightarrow{OR}$ 和向量 $(1 , 0)$ 夾角$=60^\circ$

$\therefore \overleftrightarrow{OR}$：$\sqrt{3}x+y=0$

又點 S 為 L 和直線 OR 的交點

將 $y=1$ 代入 $\sqrt{3}x+y=0$ 得點 S 的坐標為 $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{n\,(2a+(n-1)\,d)}{2}$

   首項為 a，公比為 $r\,(r\neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{a\,(1-r^n)}{1-r}$

2. 三角函數的和角公式：$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

   $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

   $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

3. $\triangle ABC$ 的正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$（$R$ 為$\triangle ABC$ 外接圓半徑）

   $\triangle ABC$ 的餘弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

4. 一維數據 X：x_1，x_2，……，x_n，

   算術平均數 $\mu_X=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)$

   標準差 $\sigma_X=\sqrt{\dfrac{1}{n}\left[(x_1-\mu_X)^2+(x_2-\mu_X)^2+\cdots\cdots+(x_n-\mu_X)^2\right]}$

   $=\sqrt{\dfrac{1}{n}\left[(x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_n^2)-n\mu_X^2\right]}$

5. 二維數據 (X, Y)：(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，……，(x_n, y_n)，

   相關係數 $r_{X,Y}=\dfrac{(x_1-\mu_X)(y_1-\mu_Y)+(x_2-\mu_X)(y_2-\mu_Y)+\cdots\cdots+(x_n-\mu_X)(y_n-\mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

   迴歸直線 (最適合直線) 方程式 $y-\mu_Y=r_{X,Y}\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$

6. 參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414$，$\sqrt{3}\approx 1.732$，$\sqrt{5}\approx 2.236$，$\sqrt{6}\approx 2.449$，$\pi\approx 3.142$

7. 對數值：$\log 2\approx 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$，$\log 5\approx 0.6990$，$\log 7\approx 0.8451$