林麻

# 110 學測

試題答案依據大考中心公布內容

# 數學考科

● 忠明高中・陳冠州 老師

總召集/陳彦良

總編輯/李心筠

主 編/吳崇欽

責編/黃美甄

美 編/戴 寧・杜政賢

出版/民國一一〇年二月

發行所 / 70248 臺南市新樂路 76 號

編輯部 / 70252 臺南市新忠路 8-1 號電 話 / (06) 2619621 #312

E-mail / periodical@hanlin.com.tw 翰林官網 http://www.hle.com.tw



翰林出版

## 試題分析





忠明高中 ● 陳冠州 老師

首先我們先回顧一下,102 年學測是第一次依 99 課綱命題,至 109 年學測各章命題 數統計如下:

範	年度	102	103	104	105	106	107	108	109	小計
第一冊	數與式	1	2	0	1	0	0	1	1	6
	多項式函數	2	2	1	2	2	1	2	1	13
	指數與對數函數	2	2	2	1	2	2	2	1	14
	數列與級數	1	1	2	1	1	0	1	1	8
第	排列、組合	2	2	2	1	2	0	2	1	12
₩	機率	1	1	2	2	1	1	1	2	11
	數據分析	1	1	1	2	2	2	2	1	12
<i></i>	三角	2	2	2	2	2	3	2	4	19
第三冊	直線與圓	1	2	1	2	2	3	2	1	14
1113	平面向量	2	2	2	1	1	3	1	2	14
第四冊	空間向量	0	1	2	1	2	2	1	2	11
	空間中的平面與直線	2	1	1	2	2	1	1	1	11
	矩陣	1	1	1	1	0	1	1	1	7
	二次曲線	2	0	1	1	1	1	1	1	8

由以上考題數分析數點歸納如下:

- (1) 四冊配分中,以第三冊命題最多,第一冊最少;以章節論,三角考最多,甚至在 109 年 考 4 題,在 108 課綱三角份量比 99 課綱更重,可預期未來考題三角份量會增加;以公 式論,餘弦定理考最多。
- (2) 近年來素養題逐漸增加,在 106、107、108、109 年各有 4、3、5、4 題,約占整份學測 試卷  $\frac{1}{5}$ ,學子對於生活事物不能無感,尤其是重要新聞時事,如近期的新冠肺炎,但 不用深入,知道大概即可。此外,加強閱讀能力也是必備的解題能力,否則可能因題 目看不懂而無法得分。若同學行有餘力,也建議同學涉獵數學科普,如 2015 年發現的 Type15 凸五邊形鋪磚型態就成為 106 年學測多選第 11 題。

- (3) 解題著重: (觀念) + (圖解),幾乎只考課本公式,少複雜計算、更少特殊技巧。
- (4) 在 108、109 年學測的 20 題考題中,與課本或習作有高度相似者都各有 9 題,在課本都可以找到類似題,只要把握住這 9 題,再多對個 1 題,分數就會落在均標附近!大考中心希望讓同學有努力就有分數,不放棄數學!
- (5) 學測偶爾(約三年一次) 會考到課本無提及的觀念(但資質好的同學,還是可以當場想出來),同學仍需弄懂,因為今年命題教授看到以前考過這觀念,可能就會出個類似的題目再考一次,舉個例子說吧! 105 年學測多選第 10 題考「正係數方程式無正根」,緊接同年的指考乙單選第 1 題就考了類似觀念「正、負係數交錯方程式無負根」,隔年(106 年)再接再厲,學測選填 C 再考一次與 105 年學測多選第 10 題相同觀念!結論就是必須好好練習歷屆試題!

#### 二 110 學測數學試題分析

大考中心所列數學測驗三目標:概念性知識、程序性知識、解決問題的能力,110學 測數學占此三測驗目標的比率依序為 15 %、50 %、35 %,主要還是程序性知識,也就是 一般考試題目較多,其實,若考生能靜下心來,不慌張,將試題中與課本類似及學測考古 類似題做對,就可以過均標了。

110 試題分配章節表				
範圍	題型			
數與式	選填 A			
多項式函數	單選 5,多選 13			
指數與對數函數	單選 2,選填 D、E			
數列與級數	多選 13			
排列、組合	無			
機率	多選 7、12,選填 C			
數據分析	多選9			
三角	單選 3,多選 8、10,選填 F			
直線與圓	無			
平面向量	單選 4,多選 8、11			
空間向量	選填 G			
空間中的平面與直線	選填 B			
矩 陣	單選 1			
二次曲線	單選 6			

#### 試題分析

由上頁表試題分配章節表可知:

#### (1) 配題:

各冊出題數相當,仍以三角考最多,指數與對數函數、機率、平面向量次之。

#### (2) 難易度:

今年相較於去年真是恍如隔世,題目是中偏難或難者占一半,比去年多三題,難度直逼 106 學測,筆者估可能是近十年中難度前二名,預估均標為 6 級分。兩年難易度差距如 此大,著實讓學子很不容易準備。

#### (3) 特色:

- ① 考到屬於國中幾何觀念的題目較以往多,如圓周角等於一半圓心角、三角形全等性質、各種多邊形性質。
- ② 多選題選項具誘導性、提示性,也就是前面選項可幫助後面選項思考,這是很好的設計方式。
- ③ 畫圖形必須超級仔細與細心,如多選8、10、11,選填F、G,甚至需圖形中數據 精確到小數點,如單選6,還有圖形不易畫的,需要邊解題邊修正圖形的,如選填 G。這倒是跟筆者強調的圖解一致,所以同學應該多多練習畫圖了!
- ④ 單選題多數題目評量單一概念;跨章節題目有兩題,全在多選題,跟以往最多一題比起來,難度倍增,這樣對前 25 % 的學生有高度鑑別度,但其餘的就混在一起了!

#### (4) 素養題:

今年偏少,只有兩題素養題,都是圖表式素養題,呼應大考中心數學測驗目標:程序性知識一能讀圖、查表,所以同學應該從平時就加強圖表閱讀,培養文字轉化圖像能力。 多選7與心理學結合,多選9搭上最近選舉話題,題目文字用辭說明精確,無以前模稜兩可的文意出現,這很值得稱讚。

(5) 特色試題:列舉幾題如下,

多選 8: 題目提及點可連成圓內接正六邊形,但要估計 *L* 斜角,所以畫出的正六邊形為 稍微右旋,若同學隨意畫,可能就會選錯了。

多選9:耐心看懂題目,利用國中知識就可以解題了。

多選 10:這與 105 年學測多選 12 類似,都是圖解,但選項(2)、(3)考 SSA 唯一性質,畫圖需要長短正確,才能正確判斷。

多選 11: 選項(3)學生通常只畫出一種梯形,這樣會誤判 ∠B 為鈍角,實則銳角、直角亦有可能。此外,選項設計成有引導解題順序,但只要一選項不會,後面的就只能用猜的。

多選 12:若依選項順序解題,在算選項(3)時較有難度,但若先算選項(4)、(5),再回頭 算選項(3)就較容易。

多選 13: 選項(4)融合等差數列轉成線型函數思考,很難的觀念題;選項(5)是此份試卷 最難題,用猜的有可能猜對,但要用嚴謹數學解題,這就難了,需用到等比 數列放大參數 *t* 倍,及牛頓插值法。

#### 三 111 學測數學展望

#### 數學均標級分、原始分數



(註:110年為預估值)

從上表走勢觀察心得及展望明年第一次 108 課綱數學學測如下:

- (1) 今年考題像是在預告明年學測數學 A 的難度,預料數學 A 難度會較以往學測難,反而數學 B 會較以往簡單,對於程度不佳的學生應該會選考數學 B,如此較願意付出時間準備數學,而不會放棄。
- (2) 雖然今年考題為近十年來相當難的,但考題中類似課本的習題有 4 題:單選 1、4,選填 B、E,學測出現過的類似題有 3 題:單選 6、多選 10、選填 C,這表示即使考題很難,只要弄懂課本及歷屆試題,成績仍然有機會達到均標,甚至超過。
- (3) 明年學測首次出現混合題型(指同時包含選擇題或選填題與非選擇題的題型,如多選題搭配非選擇題)約占15%~20%,所以學子在平時就要確實寫作業,按照數學語法表示你的計算過程,以免表示方法或邏輯不對而被扣冤枉分數。
  - 有些同學到了高中算數學,還是像國中一樣只列出正在算的部分,完整數學式都不想寫,雖然省書寫時間,但常常導致算到一半就不曉得現在算的是什麼?或者要回頭找某些資訊時卻找不到,其實這樣反而事倍功半。不如真正算懂一題,知曉每一步驟是根據什麼而來,甚至會舉一反三,不要只記方法,卻說不出引用的公式,這種錯誤學習方式,應付學校段考尚可,但面對靈活的學測題目完全不行。
- (4) 通常新課綱新增的部分,在前兩三年比較會被命題,所以同學要多加注意,如:三次 函數對稱中心、一次近似、期望值、……等。



# 數學考科

#### 第壹部分:選擇題(占65分)

忠明高中 ● 陳冠州 老師

#### 一、單選題(占30分)

說明:第1.題至第6.題,每題有5個選項,其中只有一個是正確或最適當的選項, 請劃記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者,得5分;答錯、 未作答或劃記多於一個選項者,該題以零分計算。

- 1. 設  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ 。若  $A^4 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ,則 a+b+c+d 之值為下列哪一個選項?
  - (1) 158
  - (2) 162
  - (3) 166
  - (4) 170
  - (5)174
  - 答 案 (2)
  - 命題出處 第四冊第三章 矩陣
  - 測驗目標 矩陣的乘法
  - 難易度易

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 80 \\ 0 & 81 \end{bmatrix}$$

$$\therefore a+b+c+d=1+80+0+81=162$$
  
故選(2)

- 2. 五項實數數列  $a_1$ , $a_2$ , $a_3$ , $a_4$ , $a_5$  的每一項都大於 1,且每相鄰的兩項中,都有一數是另一數的兩倍。若  $a_1 = \log_{10} 36$ ,則  $a_5$  有多少種可能的值?
  - (1) 3
  - (2) 4
  - (3) 5
  - (4) 7
  - (5) 8

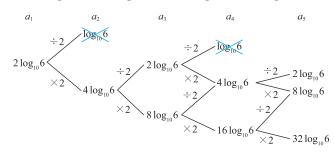
答 案 (1)

命題出處 第一冊第三章 指數與對數函數

測驗目標 對數律

難易度易

詳解  $a_1 = \log_{10} 36 = \log_{10} 6^2 = 2 \log_{10} 6$  且  $\log_{10} 6 < 1$ 



∴ *a*<sub>5</sub> 可能為 2 log<sub>10</sub> 6 , 8 log<sub>10</sub> 6 , 32 log<sub>10</sub> 6 , 共 3 種 故選(1)

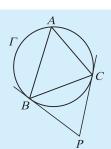
〈另解〉

- 2.  $a_5 = (\log_{10} 36) \times (2^x) \div (2^y) = (\log_{10} 36) \times 2^{x-y} > 1$

$$\Rightarrow 2^{x-y} > \frac{1}{\log_{10} 36} = \frac{1}{2 \log_{10} 6} \approx \frac{1}{2 \times 0.7781} \approx 0.64$$

$$\Rightarrow x-y \ge 0$$
,  $\exists x \ge y \cdots 2$ 

- 3. 滿足①,②之非負整數 (x,y) = (4,0),(3,1),(2,2),共 3 組 ∴  $a_5$  共 3 種可能的值,故選(1)
- 3. 如右圖, $\triangle ABC$  為銳角三角形,P 為 $\triangle ABC$  外接圓  $\Gamma$  外的一點,且  $\overline{PB}$  與  $\overline{PC}$  都與圓  $\Gamma$  相切。設  $\angle BPC = \theta$ ,試問  $\cos A$  的值為下列哪一個選項?



- $(1) \sin 2\theta$
- (2)  $\frac{\sin\theta}{2}$
- (3)  $\sin \frac{\theta}{2}$
- (4)  $\frac{\cos\theta}{2}$
- $(5)\cos\frac{\theta}{2}$

#### 110學測

#### 試題解析

#### 答 案 (3)

- 命題出處 第三冊第一章 三角
- 測驗目標 餘角關係
- 難易度 中偏易
- 詳解 令外接圓 $\Gamma$ 的圓心為O

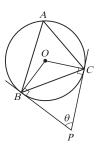
$$\therefore \angle OBP = \angle OCP = 90^{\circ}$$

$$\Rightarrow \angle BOC = 360^{\circ} - 90^{\circ} - 90^{\circ} - \theta = 180^{\circ} - \theta$$

$$\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC = 90^{\circ} - \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \cos A = \cos \left( 90^{\circ} - \frac{\theta}{2} \right) = \sin \frac{\theta}{2}$$

故選(3)



- 4. 設  $\vec{a}$  與  $\vec{b}$  都是平面上不為零的向量。若  $2\vec{a}+\vec{b}$  與  $\vec{a}+2\vec{b}$  所張成的三角形面積 為 6,則  $3\vec{a}+\vec{b}$  與  $\vec{a}+3\vec{b}$  所張成的三角形面積為下列哪一個選項?
  - (1) 8
  - (2) 9
  - (3) 12
  - (4) 13.5
  - (5) 16

#### 答 案 (5)

- 命題出處 第三冊第三章 平面向量
- 測驗目標 三角形面積 (二階行列式)
- 難易度中偏難
- $\overrightarrow{B}$  設 $\overrightarrow{a}$ ,  $\overrightarrow{b}$ 所張成的三角形面積為  $\Delta$

$$\therefore 2\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}$$
 所張成的三角形面積為  $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} | \times \Delta = 3\Delta = 6 \Rightarrow \Delta = 2$ 

$$\Rightarrow 3\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + 3\vec{b}$$
所張成的三角形面積為 $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} | \times \Delta = 8 \times 2 = 16$ 

故選(5)

- 5. 設 f(x) 為實係數三次多項式函數,滿足 (x+1)f(x) 除以  $x^3+2$  的餘式為 x+2。若 f(0)=4,則 f(2) 的值為下列哪一個選項?
  - (1) 8
- (2) 10
- (3) 15
- (4) 18
- (5) 20

答 案 (4)

- 命題出處 第一冊第二章 多項式函數
- 測驗目標 除法原理
- 難易度中
- 詳解 由題意知: $(x+1)f(x) = (x^3+2)(ax+b) + (x+2)\cdots(*)$  令 x=0 代入  $\Rightarrow f(0)=2 \cdot b+2$

$$\Rightarrow$$
 4=2b+2  $\Rightarrow$  b=1

$$a=2$$
, $b=1$  代回(\*),得( $x+1$ ) $f(x)=(x^3+2)(2x+1)+(x+2)$   
令  $x=2$  代入 3 $f(2)=10 \cdot 5+4$   $f(2)=18$   
故選(4)

- 6. 坐標平面上有一邊長為 3 的正六邊形 ABCDEF,其中 A(3,0),D(-3,0)。 試問橢圓  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$  與正六邊形 ABCDEF 有多少個交點?
  - (1) 0
- $(2)\ 2$
- (3) 4
- (4) 6
- (5) 8

答 案 (5)

- 命題出處 第四冊第四章 二次曲線
- 測驗目標 橢圓方程式
- 難易度中偏難
- 詳解 邊長 3 的正六邊形 ABCDEF 之頂點  $B\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

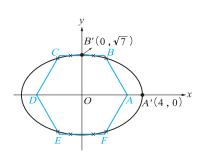
橢圓 
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1 \ge a = 4$$
, $b = \sqrt{7}$ 

知長軸頂點 A'(4,0), 短軸頂點  $B'(0,\sqrt{7})$ 

$$\therefore \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx \frac{3 \times 1.732}{2} = 2.598 \cdot \sqrt{7} \approx 2.646$$

∴ B′ 點略高過 B 點

由右圖可知共有8個交點 故選(5)



#### 二、多選題(占35分)

說明:第7.題至第13.題,每題有5個選項,其中至少有一個是正確的選項,請將正確選項劃記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定,所有選項均答對者,得5分;答錯1個選項者,得3分;答錯2個選項者,得1分;答錯多於2個選項或所有選項均未作答者,該題以零分計算。

7. 心理學家找了 1000 位受試者進行暗室實驗,每位受試者都要觀看及辨識 6、 8、9 三張數字卡,發現將實際數字看成某個數字的機率如下表:

看成數字 實際數字	6	8	9	其他
6	0.4	0.3	0.2	0.1
8	0.3	0.4	0.1	0.2
9	0.2	0.2	0.5	0.1

例如:實際數字 6 被看成 6、8、9 的機率分別為 0.4、0.3、0.2, 而被看成其他數字的機率是 0.1。根據上述實驗結果,試選出正確的選項。

- (1)如果實際數字是8,則至少有一半的可能性會被看成是8
- (2)如果實際數字是6,則有六成的可能性會被看成不是6
- (3)在6、8、9三數字中,被誤認的可能性以9最低
- (4)如果被看成的數字是6,則實際上就是6的可能性不到一半
- (5)如果被看成的數字是 9,則實際上就是 9 的可能性超過  $\frac{2}{3}$

#### 答 案 (2)(3)(4)

命題出處 第二冊第三章 機率

測驗目標 條件機率

難易度易

詳解 (1)×:  $P(8 看成 8) = 0.4 < \frac{1}{2}$ 

(2)〇: P(6看成非 6) = 1 - P(6看成 6) = 1 - 0.4 = 0.6

(3)〇:P(8看成非8)=1-0.4=0.6

 $\therefore P(9 看 成 # 9) < P(8 看 成 # 8) = P(6 看 成 # 6)$ 

故被誤認的可能性以9最低

#### 數學考科

(4)○:所求為 P(實際 6 | 看成 6)

$$=\frac{P(實際 6 \cap 看成 6)}{P(看成 6)}$$

$$=\frac{0.4}{0.4+0.3+0.2}=\frac{4}{9}<\frac{1}{2}$$

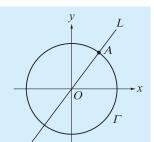
(5)×:所求為 P(實際 9 | 看成 9)

$$=\frac{P(實際 9 \cap 看成 9)}{P(看成 9)}$$

$$=\frac{0.5}{0.2+0.1+0.5}=\frac{5}{8}<\frac{2}{3}$$

故選(2)(3)(4)

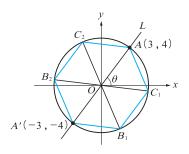
8. 如右圖,L 為坐標平面上通過原點 O 的直線, $\Gamma$  是以 O 為圓 心的圓,且 L 與  $\Gamma$  有一個交點 A (3,4)。已知 B,C 為  $\Gamma$  上 的相異兩點滿足  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA}$ 。試選出正確的選項。



- (1) L 與  $\Gamma$  的另一個交點為 (-4, -3)
- (2)直線 BC 的斜率為  $\frac{3}{4}$
- $(3) \angle AOC = 60^{\circ}$
- (4)  $\triangle ABC$  的面積為  $\frac{25\sqrt{3}}{2}$
- (5) B 與 C 在同一象限內
- 答 案 (3)(5)
- 命題出處 第三冊第一章 三角、 第三冊第三章 平面向量
- 測驗目標 三角形面積、向量定義
- 難易度中偏難

$$(2)\times: m_{BC}=m_{OA}=\frac{4}{3}$$

(3)〇:  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA}$   $\therefore \overrightarrow{BC} / / \overrightarrow{OA}$ 且  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ (亦為圓 O 之半徑) 又  $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} = 5$  $\therefore \triangle OBC$  為正三角形 $\triangle \angle BCO = 60^\circ$ 故  $\angle AOC = \angle BCO = 60^\circ$  ( $\because \overrightarrow{BC} / / \overrightarrow{OA}$ )



(4)×:由(3)之作圖知  $\overrightarrow{BC}$ 有兩處: $\overrightarrow{B_1C_1}$ , $\overrightarrow{B_2C_2}$  又  $\angle B_iOA'=180^\circ-60^\circ-60^\circ=60^\circ$ ,其中 i=1,2

二六邊形 AC<sub>1</sub>B<sub>1</sub>A'B<sub>2</sub>C<sub>2</sub> 為正六邊形

故△ABC 面積為

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 5 \times \sin 120^{\circ} = \frac{25}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$$

$$(5)\bigcirc: : \tan\theta = m_{OA} = \frac{4}{3} < \sqrt{3} = \tan 60^{\circ}$$

 $\therefore \theta$  略小於 60° (實際上,  $\theta \approx 53$ °)

:.此正六邊形為稍微右旋

故由圖知: $B \setminus C$ 在同一象限內

故撰(3)(5)

9. 某村的村長選舉設有兩個投票所。已知兩位候選人在各投票所得到的有效票數 比例如下表(廢票不列入計算):

	甲候選人	乙候選人
第一投票所	40 %	60 %
第二投票所	55 %	45 %

假設第一投票所與第二投票所的有效票數分別為x與y(其中x>0,y>0),且以總得票數較高者為當選人。根據上述表格,試選出正確的選項。

- (1)當有效票數的總和x+y已知時,就可決定當選人
- (2)當x:y的比值小於  $\frac{1}{2}$  時,就可決定當選人
- (3)當x>y時,就可決定當選人
- (4)當甲候選人在第一投票所的有效票數比在第二投票所的有效票數多時,就可 決定當選人
- (5)當乙候選人在第二投票所的有效票數比在第一投票所的有效票數多時,就可決定當選人

答 案 (2)(3)(4)

命題出處 第二冊第四章 數據分析

測驗目標 閱讀與表達能力

難易度 中偏易

#### 詳解 甲總得票數為 0.4x+0.55v

乙總得票數為 0.6x+0.45y

甲當選⇔甲總得票數>乙總得票數

$$\Leftrightarrow 0.4x + 0.55y > 0.6x + 0.45y$$

$$\Leftrightarrow v > 2x$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{x}{v} < \frac{1}{2}$$

反之,乙當選⇔ 
$$\frac{x}{y} > \frac{1}{2}$$

$$(1) \times : x+y$$
 已知,仍不知  $\frac{x}{y}$  為何,故無法決定當選人

$$(2)$$
〇:  $\frac{x}{v} < \frac{1}{2}$  🖒 甲當選

$$(3)$$
〇: $x>y$  $\Rightarrow \frac{x}{y}>1>\frac{1}{2}$  $\Rightarrow$ 乙當選

$$(4)$$
〇:  $0.4x > 0.55y$   $\Rightarrow \frac{x}{y} > \frac{11}{8} > \frac{1}{2}$   $\Rightarrow$  乙當選

$$(5) \times : 0.45y > 0.6x \Rightarrow \frac{x}{y} < \frac{3}{4}$$

無法確定  $\frac{x}{v}$  大於或小於  $\frac{1}{2}$  ,故無法決定當選人

故撰(2)(3)(4)

- 10. 在 $\triangle ABC$ 中,已經知道 $\overline{AB}=4$ 和 $\overline{AC}=6$ ,此時尚不足以確定 $\triangle ABC$ 的形狀與大小。但是,只要再知道某些條件(例如:再知道 $\overline{BC}$ 的長度),就可確定  $\triangle ABC$  唯一的形狀與大小。試選出正確的選項。
  - (1)如果再知道 cosA 的值,就可確定△ABC 唯一的形狀與大小
  - (2)如果再知道  $\cos B$  的值,就可確定 $\triangle ABC$  唯一的形狀與大小
  - (3)如果再知道 cosC 的值,就可確定△ABC 唯一的形狀與大小
  - (4)如果再知道 $\triangle ABC$ 的面積,就可確定 $\triangle ABC$ 唯一的形狀與大小
  - (5)如果再知道△ABC的外接圓半徑,就可確定△ABC唯一的形狀與大小

#### 答 案 (1)(2)

命題出處 第三冊第一章 三角

測驗目標 正、餘弦定理與面積公式

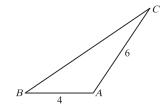
難易度中偏難

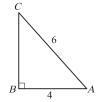
由 SAS 作圖知,可確定△ABC唯一

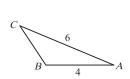
(2)○:知道  $\cos B$  ▷  $\angle B$  的可能情况有三:

① ∠B 為銳角









不論  $\angle B$  是三種情況的哪一種,都可確定 $\triangle ABC$  唯一

(3)×:知道  $\cos C$  ▷ ∠ C 的可能情況有三:銳角、直角、鈍角

① 若 ∠C 為鈍角或直角時

 $\Box \overline{AB}$  為最大邊,但與題意: $\overline{AB} < \overline{AC}$  矛盾  $\therefore \triangle ABC$  不存在

② 若  $\angle C$  為銳角時,無法確定  $\angle B$  為銳角、直角或鈍角 故無法確定△ABC唯一

〈另解〉

(2)○(3)×:利用下列性質判斷:

已知三角形兩邊長及其中大邊之對角,則可確定△ABC唯一。

例:已知 $\triangle PQR$ 中:① $\overline{PQ}$ , $\overline{PR}$  長度;② $\overline{PQ}$ > $\overline{PR}$ ;

③  $\angle R$  之角度,則可確定 $\triangle POR$  唯一

 $\therefore \overline{AC} > \overline{AB}$   $\therefore$  知道  $\angle B$  時,可確定  $\triangle ABC$  唯一

故(2)〇;(3)×

 $(4) \times : : \triangle ABC$  面積 $= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin A$  : 知道  $\sin A$ 

但  $\angle A$  可能有兩解,故無法確定 $\triangle ABC$  唯一

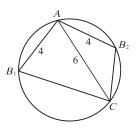
(5)×:如右圖,無法確定△ABC唯一

〈另解〉

$$\frac{\overline{AC}}{\sin B} = 2R \ \, \Box \ \, \frac{6}{\sin B} = 2R \ \, \Box \ \, \sin B = \frac{3}{R}$$

□ ∠ B 可能有兩解,故無法確定 △ ABC 唯一

故選(1)(2)



- 11. 平面上有一梯形 ABCD, 其上底  $\overline{AB} = 10$ 、下底  $\overline{CD} = 15$ , 且腰長  $\overline{AD} = \overline{BC} + 1$ 。 試選出正確的選項。
  - $(1) \angle A > \angle B$

(2)  $\angle B + \angle D < 180^{\circ}$ 

(3)  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} < 0$ 

(4) BC 的長可能是 2

 $(5) \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} < 30$ 

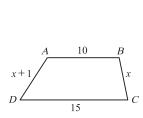
答 案 (1)(2)(5)

命題出處 第三冊第三章 平面向量

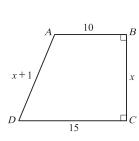
測驗目標 向量的內積

難易度難

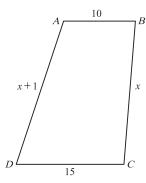
詳解 設  $\overline{BC} = x$ ,則  $\overline{AD} = x + 1$ ,梯形 ABCD 可能的情形如下:



圖(-) ∠B 為鈍角

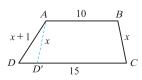


圖□ ∠B 為直角



圖=  $\angle B$  為銳角

(1)〇:圖(二)、圖(三)明顯 $\angle A>\angle B$ 在圖(-)中,作等腰梯形 $\angle ABCD'$ 

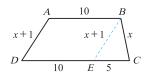


$$(2)\bigcirc: \angle B + \angle D < \angle A + \angle D = 180^{\circ}$$

 $(3) \times$ :由圖(-)、(-)、(-)知: $\angle B$  是鈍角、直角、銳角均有可能

 $\therefore \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$  是負、0、正均有可能

(4)×:  $f = \overline{BE} / \overline{AD} \Rightarrow \overline{CE} = 15 - 10 = 5$  $\triangle BCE \Rightarrow (x+1) + x > 5 \Rightarrow x > 2$ 



$$(5)\bigcirc: \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = x \times 15 \times \cos \angle BCE = x \times 15 \times \frac{x^2 + 5^2 - (x+1)^2}{2 \times x \times 5}$$

$$= 3(12 - x) < 3(12 - 2) \quad (\because x > 2)$$

$$= 30$$

故選(1)(2)(5)

12. 設 P(X) 表示事件 X 發生的機率,而 P(X|Y) 表示在事件 Y 發生的條件下,事件 X 發生的機率。今有 2 顆黑球、2 顆白球、3 顆紅球共 7 顆大小相同的球排成一列。設事件 A 為 2 顆黑球相鄰的事件,事件 B 為 2 顆黑球不相鄰的事件,而事件 C 為任 2 顆紅球都不相鄰的事件。試選出正確的選項。

$$(1) P(A) > P(B)$$

(2) 
$$P(C) = \frac{2}{7}$$

(3) 
$$2P(C|A) + 5P(C|B) < 2$$

(4) 
$$P(C|A) > 0.2$$

(5) 
$$P(C|B) > 0.3$$

答 案 (2)(5)

命題出處 第二冊第三章 機率

測驗目標 條件機率及其加法法則

難易度難

解 n(S) = 7!

$$(1) \times : P(A) = \frac{6! \times 2!}{7!} = \frac{2}{7} \cdot P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

$$\therefore P(A) < P(B)$$

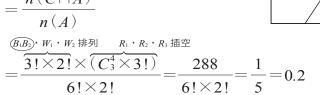
(2) 
$$\bigcirc: P(C) = \frac{4! \times (C_3^5 \times 3!)}{7!} = \frac{2}{7}$$

$$(3) \times : \therefore P(C) = P(A) \times P(C|A) + P(B) \times P(C|B)$$

$$\therefore \frac{2}{7} = \frac{2}{7} \times P(C|A) + \frac{5}{7} \times P(C|B)$$

$$\Rightarrow 2P(C|A) + 5P(C|B) = 2$$

$$(4) \times : P(C|A) = \frac{n(C \cap A)}{n(A)}$$



(5)〇:將 
$$P(C|A) = \frac{1}{5}$$
 代入  $2P(C|A) + 5P(C|B) = 2$ 

$$\Rightarrow 2 \times \frac{1}{5} + 5P(C|B) = 2 \Rightarrow P(C|B) = \frac{8}{25} > 0.3$$

故選(2)(5)

〈另解〉

$$(5)\bigcirc : P(C|B) = \frac{P(C \cap B)}{P(B)} = \frac{P(C) - P(C \cap A)}{P(B)}$$
$$= \frac{\frac{2}{7} - \frac{288}{7!}}{\frac{5}{7!}} = \frac{8}{25}$$

$$(3)$$
×:將 $P(C|A) = \frac{1}{5}$ , $P(C|B) = \frac{8}{25}$ 代入

$$2P(C|A) + 5P(C|B) = 2 \times \frac{1}{5} + 5 \times \frac{8}{25} = 2$$

#### 數學考科

- 13. 設多項式函數  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ,其中 a,b,c 均為有理數。試選出正確的撰項。
  - (1)函數 y = f(x) 與拋物線  $y = x^2 + 100$  的圖形可能沒有交點
  - (2)若 f(0) f(1) < 0 < f(0) f(2) ,則方程式 f(x) = 0 必有三個相異實根
  - (3)若 1+3i 是方程式 f(x)=0 的複數根,則方程式 f(x)=0 有一個有理根
  - (4)存在有理數 a, b, c 使得 f(1), f(2), f(3), f(4) 依序形成等差數列
  - (5)存在有理數  $a \cdot b \cdot c$  使得  $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot f(4)$  依序形成等比數列
  - 答 案 (2)(3)(5)
  - 命題出處 第一冊第二章 多項式函數、 第二冊第一章 數列與級數
  - 測驗目標 高次方程式之根與係數的關係、虛根成對定理、勘根定理、等差數列與 等比數列
  - 難易度難
  - 詳解 (1)×: $x^3+ax^2+bx+c=x^2+100$  為三次方程式  $\Rightarrow$ 至少有一實根,即至少有一交點
    - (2)○: f(0)f(1)<0 □ 在 0~1 至少有一實根

$$\frac{f(0)f(2)}{f(0)f(1)} < 0 \Rightarrow \frac{f(2)}{f(1)} < 0$$

- □ f(1) f(2) <0 □ 在 1~2 至少有一實根</p>
- 又f(x) = 0有三根且虛根要成對
- ::第三根亦為實根
- 故f(x) = 0有三相異實根
- (3)〇:: 1+3i 為 f(x)=0 之一根 ...必有另一根 1-3i 設 f(x)=0 之三根 x=1+3i ,1-3i , $\alpha$

由根與係數的關係知: $(1+3i)+(1-3i)+\alpha=-\frac{a}{1}$ 

- $\Rightarrow \alpha = -a 2 \in \mathbb{Q} (:: a \in \mathbb{Q})$
- $(4) \times : \Leftrightarrow a_1 = f(1) , a_2 = f(2) , a_3 = f(3) , a_4 = f(4)$

假設  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $a_4$  成等差數列

$$\Diamond$$
 (1,  $a_1$ ), (2,  $a_2$ ), (3,  $a_3$ ), (4,  $a_4$ ) 必在某直線  $L$  上

又  $(1, a_1)$ ,  $(2, a_2)$ ,  $(3, a_3)$ ,  $(4, a_4)$  在y=f(x) 上

此表L與y=f(x)有四個交點

但 f(x) 次數為三次

::不可能有四交點

故假設錯誤,即  $a_1$ , $a_2$ , $a_3$ , $a_4$  不可能成等差數列

 $\therefore f(x) \ge x^3$  項係數為 1  $\therefore A=1$ 

f(1) = 2t D = 2t

 $\therefore f(2) = 4t$   $\therefore C+D=4t \Rightarrow C+2t=4t \Rightarrow C=2t$ 

 $\therefore f(3) = 8t \quad \therefore 2B + 2C + D = 8t \Rightarrow 2B + 2 \times 2t + 2t = 8t \Rightarrow B = t$ 

f(4) = 16t 6+6B+3C+D=16t

 $\Rightarrow$  6+6×t+3×2t+2t=16t  $\Rightarrow$  t=3

代回 D=2t=6, C=2t=6, B=t=3

代回得 f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) + 3(x-1)(x-2) + 6(x-1) + 6

將 f(x) 展開得  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 8x$ , 再與  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 

比較係數就可得a,b,c,且均為整數(有理數)

註:若f(1),f(2),f(3),f(4) 形成等比數列,公比為r,則:

f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-2) + C(x-1) + D,

其中 
$$B = \frac{3}{r-1}$$
 ,  $C = \frac{6}{(r-1)^2}$  ,  $D = \frac{6}{(r-1)^3}$ 

故選(2)(3)(5)

#### 第貳部分:選填題(占35分)

- 說明: 1. 第 A. 至 G. 題,將答案劃記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(14-32)
  - 2. 每題完全答對給5分,答錯不倒扣,未完全答對不給分。
- A. 某機器貓從數線上原點位置朝數線的正向移動,其移動方式如下:以8秒為一週期,每一週期先以每秒4單位長等速度移動6秒,再休息2秒。如此繼續下去,則此機器貓在開始移動後 10 秒會抵達數線上坐標為116的位置。

答 案 37

命題出處 第一冊第一章 數與式

測驗目標 數與數線

難易度易

**詳**解 每一週期會移動 4×6=24 單位長,116÷24=4······20 即移動 4 個週期,尚餘 20 單位長

故開始移動後  $4\times8+\frac{20}{4}=37$  秒會抵達

B. 坐標空間中有兩條直線  $L_1$  ,  $L_2$  與一平面 E , 其中直線  $L_1$  :  $\frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{-5}$  , 而

 $L_2$ 的參數式為  $\begin{cases} x=1 \\ y=1+2t \ (t 為實數) \circ 若 L_1 落在 E 上,且 <math>L_2$  與 E 不相交,則 z=1+3t

E的方程式為x- **ⓑ** y+ **⑰** z= **⑱** 。

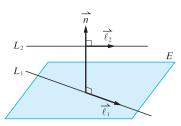
- 答 x-6y+4z=0
- 命題出處)第四冊第二章 空間中的平面與直線
- 測驗目標 平面方程式、直線與平面的關係
- 難易度中
- 詳解  $L_1 \setminus L_2$  之方向向量分別為  $\vec{\ell}_1 = (2, -3, -5), \vec{\ell}_2 = (0, 2, 3)$

E 之法向量  $\vec{n} \perp \vec{\ell}_1$  , $\vec{n} \perp \vec{\ell}_2$ 

- $\therefore \vec{n} /\!/ \vec{\ell}_1 \times \vec{\ell}_2 = (1, -6, 4)$
- $\therefore \Leftrightarrow E : x 6y + 4z = d$

將 $L_1$ 上一點(0,0,0)代入E得d=0

代回 E 的方程式為 x-6y+4z=0



- - <u>答案</u> 1
  - 命題出處 第二冊第三章 機率
  - 測驗目標 機率的性質
  - 難易度 中偏難
  - 詳解 $n(S) = C_3^9 = 84$ ,一一測試(但質數 5,7 不可能,刪除) 可得:(1,2,8),(1,4,9),(2,3,6),(2,4,8),(2,8,9),(3,6,8),共六組 故 $p = \frac{6}{84} = \frac{1}{14}$
- D. 在坐標平面上, $\Gamma$ 是邊長為 4 的正方形,其中心位在點(1,1),且各邊與坐標軸平行。已知函數  $y=a\times 2^x$  的圖形與  $\Gamma$  相交,其中 a 為實數,則 a 的最大可能範圍為 ②③  $\leq a\leq$  ④ 。

#### 110學測

#### 試題解析

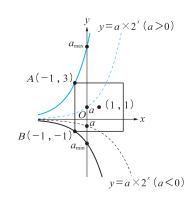
答 案  $-2 \le a \le 6$ 

命題出處 第一冊第三章 指數與對數函數

測驗目標 指數函數的圖形

難易度中

詳解 
$$A(-1,3)$$
 代入  $y=a\times 2^x \Leftrightarrow 3=a\times 2^{-1}$   $\Leftrightarrow a=6$   $B(-1,-1)$  代入  $y=a\times 2^x \Leftrightarrow -1=a\times 2^{-1}$   $\Leftrightarrow a=-2$  故  $-2\leq a\leq 6$ 



E. 將  $(\sqrt[3]{49})^{100}$  寫成科學記號  $(\sqrt[3]{49})^{100} = a \times 10^n$ ,其中  $1 \le a < 10$ ,且 n 為正整數。 若 a 的整數部分為 m, 則數對 (m, n) = (25) , 26(27) )。

答 案 (2,56)

命題出處 第一冊第三章 指數與對數函數

測驗目標 位數與首數

難易度中

#  $a \times 10^n = (\sqrt[3]{49})^{100} = (7^{\frac{2}{3}})^{100} = 7^{\frac{200}{3}}$ 

兩邊同取  $\log$  ,得  $\log a + \log 10^n = \frac{200}{3} \log 7$ 

 $\Rightarrow_n + \log a \approx \frac{200}{3} \times 0.8451 = 56.34$ 

 $\therefore n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \le \log a < 1$   $\therefore n = 56$ ,  $\log a \approx 0.34 = \log 2.\dots$ 

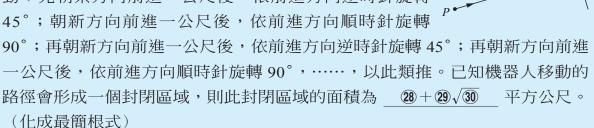
 $\Rightarrow a=2.\dots$ ,其整數部分 m=2

故數對 (m, n) = (2, 56)

F. 如右圖,機器人在地面上從一點P出發,按照以下規則移

動:先朝某方向前進一公尺後,依前進方向逆時針旋轉

45°;朝新方向前進一公尺後,依前進方向順時針旋轉



答案 8+4√2

命題出處 第三冊第一章 三角

測驗目標 閱讀與表達能力

難易度中偏難

詳解將 1 45°

1 45° 45° 視為一個週期,則每

完成一個週期後,機器人就順時針旋轉 90°-45°=45°

:.再轉到與出發點 P 有相同方向,需經 過  $360^{\circ} \div 45^{\circ} = 8$  個週期



其面積為 (邊長  $2+\sqrt{2}$  之正方形)  $+4\times$  (腰長 1 之等腰直角三角形)

= 
$$(2+\sqrt{2})^2+4\times\left(\frac{1}{2}\times1\times1\right)=8+4\sqrt{2}$$
 (平方公尺)

G. 在四面體 ABCD 中, $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = 4\sqrt{6}$ 、 $\overline{BD} = \overline{CD} = 8$ ,且  $\cos \angle BAC = \frac{1}{3}$ ,則 點 D 到平面 ABC 的距離為 ③ $\sqrt{32}$  。 (化成最簡根式)



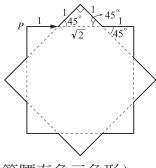
- 命題出處 第四冊第一章 空間向量
- 測驗目標 立體圖形
- 難易度中偏難

$$\overline{BC}^{2} = (4\sqrt{6})^{2} + (4\sqrt{6})^{2} - 2 \times 4\sqrt{6} \times 4\sqrt{6} \times \frac{1}{3}$$
$$= 96 + 96 - 192 \times \frac{1}{3} = 128$$

$$\Rightarrow \overline{BC} = 8\sqrt{2}$$

- 2.  $\triangle BCD \Rightarrow \overline{BC} : \overline{CD} : \overline{BD} = 8\sqrt{2} : 8 : 8 = \sqrt{2} : 1 : 1$ 
  - ∴  $\triangle BCD$  為等腰直角三角形且  $\angle BDC = 90^{\circ}$
  - $\therefore$ 其外心為斜邊 $\overline{BC}$ 之中點M
- 3.  $\therefore \overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD}$   $\therefore A$  在底面 BCD 之垂足為  $\triangle BCD$  之外心 M  $\Rightarrow \overline{AM} \perp$  底面 BCD  $\Rightarrow$  側面  $ABC \perp$  底面 BCD

$$\therefore d(D, \overline{\Psi}$$
面  $ABC) = \overline{DM} = \frac{1}{2}\overline{BC} \ (\because M 為 \triangle BCD 之外心)$ 
$$= \frac{1}{2} \times 8\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$



#### 參考公式及可能用到的數值

- 1. 首項為 a ,公差為 d 的等差數列前 n 項之和為  $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$  首項為 a ,公比為  $r(r \neq 1)$  的等比數列前 n 項之和為  $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$
- 2. 三角函數的和角公式: $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$   $\cos(A+B) = \cos A \cos B \sin A \sin B$   $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 \tan A \tan B}$
- 3.  $\triangle ABC$  的正弦定理: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \ (R 為 \triangle ABC$ 外接圓半徑)  $\triangle ABC$  的餘弦定理: $c^2 = a^2 + b^2 2ab \cos C$
- 4. 一維數據  $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ,算術平均數  $\mu_X = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  標準差  $\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} ((\sum_{i=1}^n x_i^2) n\mu_X^2)}$
- 5. 二維數據 (X, Y):  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ , .....,  $(x_n, y_n)$ ,
  相關係數  $r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i \mu_X) (y_i \mu_Y)}{n\sigma_X \sigma_Y}$

迴歸直線(最適合直線)方程式  $y-\mu_Y=r_{X,Y}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$ 

- 6. 參考數值: $\sqrt{2} \approx 1.414$ , $\sqrt{3} \approx 1.732$ , $\sqrt{5} \approx 2.236$ , $\sqrt{6} \approx 2.449$ , $\sqrt{7} \approx 2.646$ , $\pi \approx 3.142$
- 7. 對數值: $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ , $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ , $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ , $\log_{10} 7 \approx 0.8451$
- 8. 角錐體積  $=\frac{1}{3}$  (底面積×高)



### 做好做满 3效複習



# 指等即戰力

# 高效複習計畫



- 科目 國文、英文、數學甲(自然組)、數學乙(社會組)、 物理、化學、生物、歷史、地理、公民與社會
- ◆ 打破章節,依照主題統整方式彙編
- ♠ 完整重點整理,確實掌握致勝關鍵
- ♠ 精挑模擬試題,大考題型完全透析

超值配套 物、化、生、歷、公附關鍵重點手冊 英文內附指考時事題

# 全效複習計畫



- 科目 國文、英文、數學甲(自然組)、數學乙(社會組)、 物理、化學、生物、歷史、地理、公民與社會
- ▲ 依大考規劃複習進度,直擊命題核心
- ▲ 搭配複習評量計畫,掌握進度不費力
- ▲ 結合多元題型演練,提升大考實戰力

超值配套》數甲、數乙、英文附重點手冊

# 速效複習計畫



- 科目 國文、英文、數學甲(自然組)、數學乙(社會組)、 物理、化學、生物、歷史、地理、公民與社會
- ▲ 收錄近年大學指定科目考題,掌握命題趨勢
- ▲ 名師完整分析暨精解,掌握解題技巧與觀念
- ▲ 每回附指考5標,有助學生了解自己的實力



※產品封面以實際成書為準





精準解析 應考無懈可擊!

# 翰林。指考歷屆試題系列

✓ 出版科目:國文、英文、數學甲、數學乙、物理、

化學、生物、歷史、地理、公民與社會

✓ 鑑往知來:收錄近8~9年大學指定科目考

題,掌握出題方向與命題趨勢

✓ 精準解析:各科名師完整分析暨精解,迅速

掌握解題技巧與釐清觀念

✓ 指考 5 標:每回皆附指考 5 標,有助學生了

解自己的實力





指考衝刺必備

103

102

101