

# 102學測 精彩解析 數學考科

臺南女中／高孟鍬 老師

【試題・答案】依據大考中心公布內容

發行人／陳炳亨

總召集／周耀琨

總編輯／蔣海燕

主編／陳俊龍

校對／葉瑞賢

美編／曾伯銓、黃泓斌

■本書內容同步刊載於翰林我的網

出版／民國一〇二年二月

發行所／70248臺南市新樂路76號

編輯部／70252臺南市新忠路8-1號

電話／(06)2619621#314

E-mail／periodical@hanlin.com.tw

翰林我的網 <http://www.worldone.com.tw>

 教育優先  
百年堅持

NO.00847



翰林出版

臺南女中 / 高孟楸 老師

99 課綱的第一屆數學考題，終於在 102 年 1 月 27 日出爐囉！記得當天晚上電視訪問步出考場的考生，考生大部分都嘆氣的說：『難！！觀念複雜，歷屆最難！！』但也有極少的考生有不同見解。對於這樣的一份試題，到底隱藏著怎樣的玄機，就看下面的分析吧！！

### 1 試題分佈分析

冊別	單元	題號	分數合計	單冊合併計分
第一冊	第一章 數學式	選填 A.	5	25 分
	第二章 多項式函數	多選 9.、選填 B.	10	
	第三章 指數與對數函數	單選 2.、多選 8.	10	
第二冊	第一章 數列與級數	多選 12	5	25 分
	第二章 排列組合	單選 1.、單選 5.	10	
	第三章 機率	單選 3.	5	
	第四章 數據分析	單選 4.	5	
第三冊	第一章 三角	單選 6.、選填 G.	10	30 分
	第二章 直線與圓	選填 E. (選填 F.)	5	
	第三章 平面向量	多選 10.、 選填 C.、選填 F.	15	
第四冊	第一章 空間向量		0	20 分
	第二章 空間中的直線與平面	選填 D.、選填 H.	10	
	第三章 矩陣	多選 7.	5	
	第四章 二次曲線	多選 11.	5	

根據上表的分析不難發現，其實本份試題的分布挺平均的，各冊大約都平均分配分數，僅第三冊稍微多了一點。有些題目，其實也很難界定為哪一個單元，因為複合型的題目需要多重概念才能解題。例如選填 F.，利用向量的內積找出線性規劃的目標函數，再利用線性規劃的概念去解題；如選填 H.，雖然是以空間中的直線與平面的關係為主軸，但若沒有空間向量的基本概念也無法順利解出答案；另外如多選的 11 題，利用平面向量內積的計算求出 P. 點所在的範圍，但也需要配合二次曲線的圖形概念才能解出正確的答案。所以這一份表格僅大略的分析出，各冊的比重均勻，每一個單元都有其重要性。

## 2 試題特色

1. 題意清楚，沒有冗語：這份卷子很數學！因為每個題目雖然敘述的文字長短不一，但是都是解題相關的數學語言，沒有冗長無用的文字。以往常見的生活應用文章不再出現囉！！
2. 新課綱內容有出題，難度加深：這一屆為 99 新課綱，內容上也與以往不同，多了插值多項式、矩陣、線性規劃、條件機率與貝式定理、相關係數與最適當直線等單元內容（原為舊課綱的指定考科範圍）。為因應新增的內容，本份試卷也考了矩陣、線性規劃、條件機率與相關係數等題，因以往為指定考科的題目，除略顯這份試卷的難度之外，也在提醒考生新增的單元內容之重要性。
3. 簡易型的題目偏少：單選 1、3；選填 A、B、C；是本份試卷中簡單單一概念即可解題的題目，也就是所謂的送分題。但除了這些題目之外，需要一些綜合性的概念，想法轉個彎，才容易算出答案。
4. 圖形題目依舊重要：多選 10、多選 11、選填 E、選填 F、選填 G、選填 H 等都是需要用到圖形概念解題，可見圖形在學習數學上的重要性。

## 3 結語

99 課綱，這個有話題性的試卷，終於讓大家大開眼界囉！！

這一份卷子，沒有往年來的親切感但多了幾分數學感覺在試題裡，也沒有預期的研究用卷簡單，或許讓許多考生嘆聲連連，但也不見得就是一份很難的試卷。對教學的老師來說，其實是一份還不錯的試卷，也說明了數學教育不再只是記憶題目或純粹只有計算，也應該多活用大腦去思考。

另外，因為推薦入學的比例增加，利用學力測驗成績進大學的學子也增多，也因為學力測驗的重要性遞增，卷子的鑑別度也需要增加，所以今年度可以由此感受到，有可能往後這樣有鑑別度的試卷更易出現，也是往後學習高中數學準備學測考試的一個新指標！

總之，有正確的學習心態與踏實的學習過程，做好萬全的準備，對於考題應該可以迎刃而解的！！



臺南女中 / 高孟鞦 老師

## 第壹部分：選擇題（占 60 分）

## 一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 學校規定上學期成績需同時滿足以下兩項要求，才有資格參選模範生。
- 一、國文成績或英文成績 70 分（含）以上；
  - 二、數學成績及格。
- 已知小文上學期國文 65 分而且他不符合參選模範生資格。請問下列哪一個選項的推論是正確的？
- (1) 小文的英文成績未達 70 分
  - (2) 小文的數學成績不及格
  - (3) 小文的英文成績 70 分以上但數學成績不及格
  - (4) 小文的英文成績未達 70 分且數學成績不及格
  - (5) 小文的英文成績未達 70 分或數學成績不及格

**答 案** (5)

**命題出處** 第二冊第二章 排列組合

**測驗目標** 簡單的邏輯概念

**解 析** 因小文國文 65 分  $< 70$  分，

∴若要符合模範生資格，必須英文 70 分以上且數學及格，但小文不合資格

∴小文英文成績未達 70 分或數學成績不及格

故選(5)

**難 易 度** 易偏中

2. 令  $a=2.6^{10}-2.6^9$ ,  $b=2.6^{11}-2.6^{10}$ ,  $c=\frac{2.6^{11}-2.6^9}{2}$ 。請選出正確的大小關係。

- (1)  $a > b > c$
- (2)  $a > c > b$
- (3)  $b > a > c$
- (4)  $b > c > a$
- (5)  $c > b > a$

**答案** (4)

**命題出處** 第一冊第三章 指數與對數

**測驗目標** 指數的運算

**解析**  $a=2.6^{10}-2.6^9=2.6^9(2.6-1)=1.6 \times 2.6^9$   
 $b=2.6^{11}-2.6^{10}=2.6^9(2.6^2-2.6)=2.6 \times 2.6^9(2.6-1)=1.6 \times 2.6 \times 2.6^9$   
 $c=\frac{1}{2} \times 2.6^9(2.6^2-1)=\frac{1}{2} \times (2.6-1)(2.6+1) \times 2.6^9=1.6 \times 1.8 \times 2.6^9$   
 $\therefore a < c < b$

故選(4)

**難易度** 易

**類似題** 《大滿貫複習講義·數學 1-4 冊》第 11 頁範例 6

3. 袋子裡有 3 顆白球，2 顆黑球。由甲、乙、丙三人依序各抽取 1 顆球，抽取後不放回。若每顆球被取出的機會相等，請問在甲和乙抽到相同顏色球的條件下，丙抽到白球之條件機率為何？

- (1)  $\frac{1}{3}$
- (2)  $\frac{5}{12}$
- (3)  $\frac{1}{2}$
- (4)  $\frac{3}{5}$
- (5)  $\frac{2}{3}$

**答案** (3)

**命題出處** 第二冊第三章 機率

**測驗目標** 條件機率

**解析** 設  $A$ ：甲、乙抽到同色球

$B$ ：丙抽到白球

$$\Rightarrow P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{3}}{\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{3}}$$

甲W 乙W 丙W    甲W 乙W 丙B    甲B 乙B 丙W

$$= \frac{6+6}{6+12+6} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

故選(3)

**難易度** 易

**類似題** 《大滿貫複習講義·數學 1-4 冊》第 97 頁範例 6

4. 已知以下各選項資料的迴歸直線（最適合直線）皆相同且皆為負相關，請選出相關係數最小的選項。

(1) 

x	2	3	5
y	1	13	1

(2) 

x	2	3	5
y	3	10	2

(3) 

x	2	3	5
y	5	7	3

(4) 

x	2	3	5
y	9	1	5

(5) 

x	2	3	5
y	7	4	4

**答案** (5)

**命題出處** 第二冊第四章 數據分析

**測驗目標** 相關係數的計算與判斷

**解析** 
$$\because r_{xy} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum(y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2} \sqrt{\sum y_i^2 - n\bar{y}^2}}$$

觀察各選項，得知

① 各項的  $x$  均相同，②  $\bar{y}$  亦相同，③  $\sum_{i=1}^3 x_i y_i$  亦相同

$\therefore$  比較  $r_{xy}$  的大小，由  $\sum_{i=1}^3 y_i^2$  的大小決定

(1)  $\sum y_i^2 = 1 + 169 + 1 = 171$

(2)  $\sum y_i^2 = 9 + 100 + 4 = 113$

(3)  $\sum y_i^2 = 25 + 49 + 9 = 83$

(4)  $\sum y_i^2 = 81 + 1 + 25 = 107$

(5)  $\sum y_i^2 = 49 + 16 + 16 = 81$

但  $\because \sum y_i^2 \uparrow, |r_{xy}| \downarrow$  且  $r_{xy} < 0 \therefore r_{xy} \uparrow$

$\therefore r_{xy}$  最小者為(5)

**難易度** 中

**類似題** 《大滿貫複習講義·數學 1-4 冊》第 116 頁範例 9、第 113 頁範例 6

《學測新導向·數學》第 161 頁範例 9

5. 將 24 顆雞蛋分裝到紅、黃、綠的三個籃子。每個籃子都要有雞蛋，且黃、綠兩個籃子裡都裝奇數顆。請選出分裝的方法數。

- (1) 55
- (2) 66
- (3) 132
- (4) 198
- (5) 253

**答 案** (2)

**命題出處** 第二冊第二章 排列組合

**測驗目標** 重複組合與整數解

**解 析** 設紅籃子  $x$  個雞蛋

黃籃子  $y$  個雞蛋

綠籃子  $z$  個雞蛋

$\Rightarrow x + y + z = 24$ ，其中  $y, z$  為奇數

但  $y + z$  為偶數  $\therefore x$  亦為偶數

$\therefore$  設  $x = 2k$  ( $k$  為正整數)， $y = 2l + 1$  ( $l$  為非負整數)，

$z = 2m + 1$  ( $m$  為非負整數)

$\Rightarrow 2k + 2l + 1 + 2m + 1 = 24$

$\therefore k + l + m = 11$  ( $k \geq 1, l \geq 0, m \geq 0$ )

$\therefore$  其解為  $H_{10}^3 = C_{10}^{12} = \frac{12!}{10!2!} = 66$

故選(2)

**難 易 度** 難

**類 似 題** 《大滿貫複習講義·數學 1-4 冊》第 85 頁範例 13、範例 14  
《學測新導向·數學》第 111 頁範例 18 (4)

6. 莎韻觀測遠方等速率垂直上升的熱氣球。在上午 10:00 熱氣球的仰角為  $30^\circ$ ，到上午 10:10 仰角變成  $34^\circ$ 。請利用下表判斷到上午 10:30 時，熱氣球的仰角最接近下列哪一個度數？

$\theta$	$30^\circ$	$34^\circ$	$39^\circ$	$40^\circ$	$41^\circ$	$42^\circ$	$43^\circ$
$\sin \theta$	0.500	0.559	0.629	0.643	0.656	0.669	0.682
$\cos \theta$	0.866	0.829	0.777	0.766	0.755	0.743	0.731
$\tan \theta$	0.577	0.675	0.810	0.839	0.869	0.900	0.933

- (1)  $39^\circ$   
 (2)  $40^\circ$   
 (3)  $41^\circ$   
 (4)  $42^\circ$   
 (5)  $43^\circ$

**答案** (3)

**命題出處** 第三冊第一章 三角函數

**測驗目標** 三角函數的基本概念、查表與簡易的三角測量

**解析** 設莎韻的位置為  $O$  點，10:00 熱氣球在  $A$  點  
 10:10 熱氣球在  $B$  點  
 10:30 熱氣球在  $C$  點

如圖所示， $\angle AOH = 30^\circ$ ， $\angle BOA = 4^\circ$

設  $\angle COB = \theta$ ， $\overline{AH} = y \Rightarrow \overline{OH} = \sqrt{3}y$

設  $\overline{AB} = x$ ， $\overline{BC} = 2x$

$$\therefore \tan(\angle BOH) = \tan 34^\circ = \frac{y+x}{\sqrt{3}y} = 0.675$$

$$\Rightarrow x+y = \sqrt{3} \times 0.675y \approx 1.732 \times 0.675y = 1.1691y$$

$$\therefore x = 0.1691y$$

$$\therefore \tan(\theta + 34^\circ) = \frac{y+3x}{\sqrt{3}y} = \frac{y+0.1691y \times 3}{\sqrt{3}y} \approx \frac{1.5073}{1.732} \approx 0.870 \approx \tan 41^\circ$$

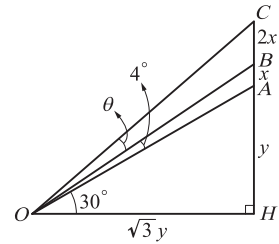
故選(3)

**難易度** 中偏難

**類似題** 《大滿貫複習講義·數學 1-4 冊》第 138 頁範例 17

第 141 頁指考試題單選 2

《學測新導向·數學》第 204 頁範例 32





二、多選題 (占 30 分)

說明：第 7 題至第 12 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇 (填) 題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7. 設  $n$  為正整數，符號  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n$  代表矩陣  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  自乘  $n$  次。令

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}, \text{ 請選出正確的選項。}$$

- (1)  $a_2=1$
- (2)  $a_1, a_2, a_3$  為等比數列
- (3)  $d_1, d_2, d_3$  為等比數列
- (4)  $b_1, b_2, b_3$  為等差數列
- (5)  $c_1, c_2, c_3$  為等差數列

**答案** (1)(2)(3)(5)

**命題出處** 第四冊第三章 矩陣

**測驗目標** 矩陣的乘法運算

**解析** 觀察  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1+2 \\ 0 & 2^2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1+2 \\ 0 & 2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1+2+2^2 \\ 0 & 2^3 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1+2+2^2 \\ 0 & 2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1+2+2^2+2^3 \\ 0 & 2^4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^n = \begin{bmatrix} 1 & 1+2+\cdots+2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1 \times (2^n - 1)}{2 - 1} \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

$$\therefore a_n = 1, b_n = 2^n - 1, c_n = 0, d_n = 2^n$$

- (1)  $\bigcirc$  :  $a_2 = 1$
- (2)  $\bigcirc$  :  $\because a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1 \Rightarrow$  公比  $= 1$
- (3)  $\bigcirc$  :  $\because d_1 = 2, d_2 = 2^2, d_3 = 2^3 \Rightarrow$  公比  $= 2$
- (4)  $\times$  :  $\because b_1 = 2 - 1 = 1, b_2 = 2^2 - 1 = 3, b_3 = 2^3 - 1 = 7$  非等差數列
- (5)  $\bigcirc$  :  $\because c_1 = c_2 = c_3 = 0 \Rightarrow$  公差  $= 0$

故選(1)(2)(3)(5)

**難易度** 中

**類似題** 《大滿貫複習講義·數學 1-4 冊》第 211 頁範例 4  
《學測新導向·數學》第 320 頁範例 8

8. 設  $a > 1 > b > 0$ ，關於下列不等式，請選出正確的選項。

(1)  $(-a)^7 > (-a)^9$

(2)  $b^{-9} > b^{-7}$

(3)  $\log_{10} \frac{1}{a} > \log_{10} \frac{1}{b}$

(4)  $\log_a 1 > \log_b 1$

(5)  $\log_a b \geq \log_b a$

**答案** (1)(2)

**命題出處** 第一冊第三章 指數與對數

**測驗目標** 指數與對數的不等式

**解析** (1)  $\circ : \because a > 1 \Rightarrow a^7 < a^9$

$$\Rightarrow -a^7 > -a^9 \Rightarrow (-a)^7 > (-a)^9$$

(2)  $\circ : \because b^{-9} = \left(\frac{1}{b}\right)^9, b^{-7} = \left(\frac{1}{b}\right)^7$

$$\text{且 } 0 < b < 1 \Rightarrow \frac{1}{b} > 1$$

$$\therefore \left(\frac{1}{b}\right)^9 > \left(\frac{1}{b}\right)^7 \Rightarrow b^{-9} > b^{-7}$$

(3)  $\times : \because a > 1 > b > 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} < 1 < \frac{1}{b}$$

$$\Rightarrow \log_{10} \frac{1}{a} < \log_{10} \frac{1}{b}$$

(4)  $\times : \because \log_a 1 = 0 = \log_b 1$

(5)  $\times : \text{若 } a=2, b=\frac{1}{8} \Rightarrow \begin{cases} \log_a b = \log_2 \frac{1}{8} = -3 \\ \log_b a = \log_{\frac{1}{8}} 2 = -\frac{1}{3}, (\text{不合}) \end{cases}$

故選(1)(2)

**難易度** 中

**類似題** 《大滿貫複習講義·數學 1-4 冊》第 53 頁範例 11

9. 設  $a < b < c$ 。已知實係數多項式函數  $y=f(x)$  的圖形為一開口向上的拋物線，且與  $x$  軸交於  $(a, 0)$ 、 $(b, 0)$  兩點；實係數多項式函數  $y=g(x)$  的圖形亦為一開口向上的拋物線，且跟  $x$  軸相交於  $(b, 0)$ 、 $(c, 0)$  兩點。請選出  $y=f(x)+g(x)$  的圖形可能的選項。

- (1) 水平直線
- (2) 和  $x$  軸僅交於一點的直線
- (3) 和  $x$  軸無交點的拋物線
- (4) 和  $x$  軸僅交於一點的拋物線
- (5) 和  $x$  軸交於兩點的拋物線

**答案** (4)(5)

**命題出處** 第一冊第二章 多項式函數

**測驗目標** 二次函數的圖形與圖形疊合

**解析** 設  $f(x) = m(x-a)(x-b)$ ， $m > 0$

$$g(x) = n(x-b)(x-c)$$
， $n > 0$

$$\Rightarrow f(x) + g(x) = (x-b)[m(x-a) + n(x-c)]$$

$$= (x-b)[(m+n)x - (ma+nc)]$$

$$\because m+n > 0$$

$\therefore f(x) + g(x)$  必為二次函數，圖形必為拋物線

① 若  $\frac{ma+nc}{m+n} = b$ ，則圖形為與  $x$  軸恰交一點  $(b, 0)$  的拋物線

② 若  $\frac{ma+nc}{m+n} \neq b$ ，則圖形為與  $x$  軸交兩點的拋物線

故選(4)(5)

**難易度** 中

10. 坐標平面上考慮兩點  $Q_1(1, 0)$ ， $Q_2(-1, 0)$ 。在下列各方程式的圖形中，請選出其上至少有一點  $P$  滿足內積  $\overrightarrow{PQ_1} \cdot \overrightarrow{PQ_2} < 0$  的選項。

(1)  $y = \frac{1}{2}$

(2)  $y = x^2 + 1$

(3)  $-x^2 + 2y^2 = 1$

(4)  $4x^2 + y^2 = 1$

(5)  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$

**答案** (1)(3)(4)

**命題出處** 第三冊第三章 平面向量

**測驗目標** 利用向量的基本概念導出圖形，藉由圖形的相交狀況判斷答案

**解 析** 設  $P(x, y)$

$$\therefore \overrightarrow{PQ_1} \cdot \overrightarrow{PQ_2} = (1-x, -y) \cdot (-1-x, -y) < 0$$

$$\Rightarrow (1-x)(-1-x) + y^2 < 0$$

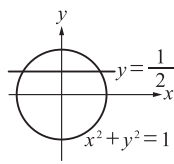
$$\Rightarrow x^2 - 1 + y^2 < 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 < 1$$

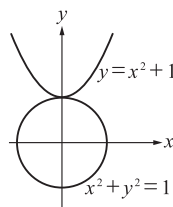
$\therefore$  滿足此條件的  $P$  點在  $x^2 + y^2 = 1$  的圓的內部

$\therefore$  判斷下列各圖形與圓  $x^2 + y^2 = 1$  內部是否有交點，即可知

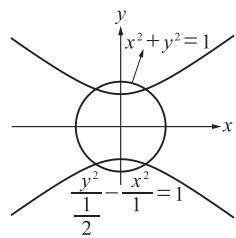
(1) ○



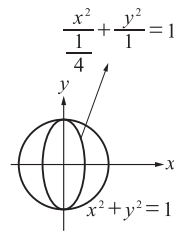
(2) ×



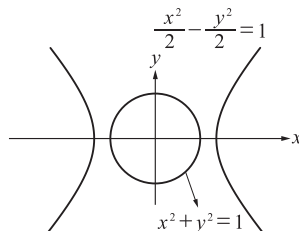
(3) ○



(4) ○



(5) ×



**難 易 度** 中偏難

11. 設  $F_1, F_2$  為橢圓  $\Gamma$  的兩個焦點。  $S$  為以  $F_1$  為中心的正方形 ( $S$  的各邊可不與  $\Gamma$  的對稱軸平行)。試問  $S$  可能有幾個頂點落在  $\Gamma$  上？

(1) 1

(2) 2

(3) 3

(4) 4

(5) 0

**答 案** (1)(2)(5)

**命題出處** 第四冊第四章 二次曲線

**測驗目標** 利用橢圓圖形的對稱性解題

**解 析** (1)(2)○：設橢圓方程式  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  且  $a > b > 0, c^2 = a^2 - b^2$

設  $F_1(c, 0)$ ，如圖所示，

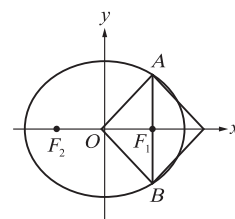
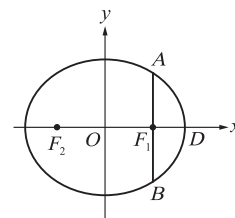
$$\overline{AF_1} = \frac{b^2}{a} \text{ 且 } \overline{OF_1} = c, \overline{F_1D} = a - c$$

$$\Rightarrow \overline{AF_1} = \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - c^2}{a}$$

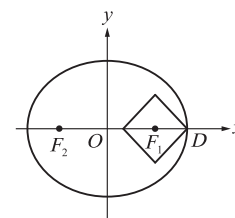
$$= a - \frac{c^2}{a} > a - c = \overline{F_1D}$$

$$(\because a > c \Rightarrow \frac{c^2}{a} < \frac{c^2}{c} = c)$$

$\therefore$  以  $\overline{AB}$  為正方形的一對角線可作出與橢圓交 2 點的正方形



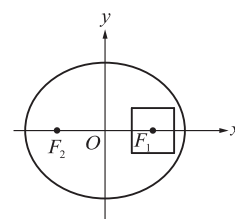
以  $D$  為對角線之一頂點可作出與橢圓交 1 點的正方形



(3)(4)  $\times$  : 利用橢圓的對稱性, 若橢圓上有  $P(x_0, y_0)$ , 最多只有  $Q(x_0, -y_0)$  一點使得  $\overline{PF_1} = \overline{QF_1}$

$\therefore$  不可能有正方形會與橢圓的交點  $\geq 3$  個

(5)  $\circ$  : 只要正方形夠小即可。



**難易度** 難

**類似題** 《大滿貫複習講義·數學 1-4 冊》第 229 頁範例 10

12. 設實數組成的數列  $\langle a_n \rangle$  是公比為  $-0.8$  的等比數列, 實數組成的數列  $\langle b_n \rangle$  是首項為  $10$  的等差數列。已知  $a_9 > b_9$  且  $a_{10} > b_{10}$ 。請選出正確的選項。

- (1)  $a_9 \times a_{10} < 0$
- (2)  $b_{10} > 0$
- (3)  $b_9 > b_{10}$
- (4)  $a_9 > a_{10}$
- (5)  $a_8 > b_8$

**答案** (1)(3)

**命題出處** 第二冊第一章 數列與級數

**測驗目標** 觀察等差數列與等比數列的性質

- 解析** (1)○ :  $\because a_9 \times a_{10} = a_1 \times (-0.8)^8 \times a_1 (-0.8)^9$   
 $= a_1^2 \times (-0.8)^{17} < 0$
- (2)× :  $\because a_9 = (-0.8)^8 \times a_1 > 10 + (9-1) \times d = b_9 \cdots \cdots \textcircled{1}$   
 $a_{10} = (-0.8)^9 \times a_1 > 10 + (10-1) \times d = b_{10} \cdots \cdots \textcircled{2}$   
 $\textcircled{1} \times (-0.8) \Rightarrow (-0.8)^9 \times a_1 < -8 - 6.4d \cdots \cdots \textcircled{3}$   
 由 $\textcircled{2}$ 、 $\textcircled{3} \Rightarrow 10 + 9d < -8 - 6.4d$   
 $\Rightarrow 15.4d < -18 \quad \therefore d < \frac{-90}{77}$   
 $\therefore b_{10} = 10 + 9d < 10 - \frac{810}{77} = \frac{-40}{77} < 0$
- (3)○ :  $\because d < \frac{-90}{77} < 0$   
 $\therefore b_{10} - b_9 < 0 \Rightarrow b_{10} < b_9$
- (4)× : 不一定  
 若  $a_1 > 0$ ,  $a_9 = a_1 (-0.8)^8 > 0 > a_{10} = (-0.8)^9 \times a_1$   
 若  $a_1 < 0$ ,  $a_9 = a_1 (-0.8)^8 < 0 < a_{10} = (-0.8)^9 \times a_1$
- (5)× : 不一定

**難易度** 中偏難

**類似題** 《大滿貫複習講義·數學 1-4 冊》第 67 頁範例 4

### 第貳部分：選填題（占 40 分）

- 說明：1. 第 A 至 H 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（ $\textcircled{13} \sim \textcircled{35}$ ）。
2. 每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 設  $k$  為一整數。已知  $\frac{k}{3} < \sqrt{31} < \frac{k+1}{3}$ ，則  $k = \underline{\textcircled{13}\textcircled{14}}$ 。

**答案**  $\textcircled{13}$  1  $\textcircled{14}$  6

**命題出處** 第一冊第一章 數與式

**測驗目標** 根式運算與估計

**解析**  $\because k < 3\sqrt{31} < k+1$

又  $3\sqrt{31} = \sqrt{9 \times 31} = \sqrt{279}$ ,  $16^2 = 256$ ,  $17^2 = 289$

$\therefore 16 < 3\sqrt{31} < 17$

$\therefore k = 16$

**難易度** 易

**類似題** 《大滿貫複習講義·數學 1-4 冊》第 7 頁範例 2、第 15 頁模考試題單選 2、第 38 頁學測試題填充 5

《學測新導向·數學》第 8 題填充第 B 題

B. 設  $a, b$  為實數且  $(a+bi)(2+6i)=-80$ ，其中  $i^2=-1$ 。  
則  $(a, b) = (\underline{\text{⑮⑯}}, \underline{\text{⑰⑱}})$ 。

**答案** ⑮ - ⑯ 4 ⑰ 1 ⑱ 2

**命題出處** 第一冊第二章 多項式函數

**測驗目標** 複數的相等

**解析**  $\because (a+bi)(2+6i)=-80$

$$\Rightarrow (2a-6b) + (2b+6a)i = -80$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a-6b = -80 \\ 2b+6a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-3b = -40 \cdots \cdots \text{①} \\ b = -3a \cdots \cdots \text{②} \end{cases}$$

$$\text{②代入①} \Rightarrow a+9a = -40 \quad \therefore a = -4, b = 12$$

**難易度** 易

**類似題** 《大滿貫複習講義·數學 1-4 冊》第 32 頁範例 16  
《學測新導向·數學》第 35 頁範例 16

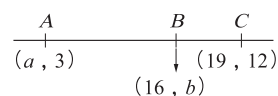
C. 坐標平面中  $A(a, 3), B(16, b), C(19, 12)$  三點共線。已知  $C$  不在  $A, B$  之間，且  $\overline{AC} : \overline{BC} = 3 : 1$ ，則  $a+b = \underline{\text{⑲⑳}}$ 。

**答案** ⑲ 1 ⑳ 9

**命題出處** 第三冊第三章 平面向量

**測驗目標** 分點公式或平行向量的係數積

**解析**  $\because C$  不在  $A, B$  之間且  $\overline{AC} : \overline{BC} = 3 : 1$



$\therefore$  如圖

$$\text{利用向量 } \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AC} \Rightarrow (16-a, b-3) = \frac{2}{3}(19-a, 9)$$

$$\therefore \begin{cases} 16-a = \frac{38}{3} - \frac{2}{3}a \\ b-3 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 9 \end{cases} \quad \therefore a+b = 19$$

〔另解〕亦可利用分點公式

$$(16, b) = \left( \frac{2 \times 19 + a}{3}, \frac{2 \times 12 + 3}{3} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 16 = \frac{38+a}{3} \\ b = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 9 \end{cases}$$

**難易度** 易

**類似題** 《大滿貫複習講義·數學 1-4 冊》第 165 頁範例 3

D. 阿德賣 100 公斤的香蕉，第一天每公斤賣 40 元；沒賣完的部份，第二天降價為每公斤 36 元；第三天再降為每公斤 32 元，到第三天全部賣完，三天所得共為 3720 元。假設阿德在第三天所賣香蕉的公斤數為  $t$ ，可算得第二天賣出香蕉的公斤數為  $at+b$ ，其中  $a = \underline{\textcircled{21}\textcircled{22}}$ ， $b = \underline{\textcircled{23}\textcircled{24}}$ 。

**答案**  $\textcircled{21} - \textcircled{22} 2 \textcircled{23} 7 \textcircled{24} 0$

**命題出處** 第四冊第二章 空間中的直線與平面

**測驗目標** 三元一次方程組的解

**解析** 設第一天賣  $x$  公斤，第二天  $y$  公斤，第三天  $t$  公斤

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+t=100 \\ 40x+36y+32t=3720 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+t=100 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 10x+9y+8t=930 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \times 10 - \textcircled{2} \Rightarrow y+2t=70 \quad \therefore y = -2t+70$$

$$\therefore a = -2, b = 70$$

**難易度** 中偏難

**類似題** 《大滿貫複習講義·數學 1-4 冊》第 181 頁範例 20

E. 坐標平面上，一圓與直線  $x-y=1$  以及直線  $x-y=5$  所截的弦長皆為 14。則此圓的面積為  $\underline{\textcircled{25}\textcircled{26}} \pi$ 。

**答案**  $\textcircled{25} 5 \textcircled{26} 1$

**命題出處** 第三冊第二章 直線與圓

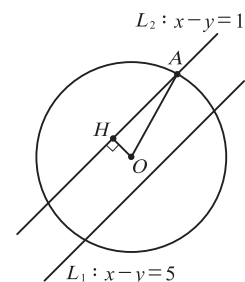
**測驗目標** 直線與圓的關係、圓內的弦與弦心距的關係

**解析** 如圖， $\because L_1 \parallel L_2$  且  $d(L_1, L_2) = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

$$\therefore \overline{OH} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2}, \overline{AH} = \frac{1}{2} \times 14 = 7$$

$$\therefore \overline{AO} = r = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{OH}^2} = \sqrt{49 + 2} = \sqrt{51}$$

$$\therefore \text{面積} = 51\pi$$



**難易度** 中

**類似題** 《大滿貫複習講義·數學 1-4 冊》第 157 頁範例 12



F. 令  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  為坐標平面上兩向量。已知  $\vec{A}$  的長度為 1,  $\vec{B}$  的長度為 2 且  $\vec{A}$  與  $\vec{B}$  之間的夾角為  $60^\circ$ 。令  $\vec{u} = \vec{A} + \vec{B}$ ,  $\vec{v} = x\vec{A} + y\vec{B}$ , 其中  $x, y$  為實數且符合  $6 \leq x+y \leq 8$  以及  $-2 \leq x-y \leq 0$ , 則內積  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  的最大值為 27 28。

**答案** 27 3 28 1

**命題出處** 第三冊第三章 平面向量  
第三冊第二章 直線與圓

**測驗目標** 向量的內積與線性規劃

**解析**  $\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{A} + \vec{B}) \cdot (x\vec{A} + y\vec{B}) = x|\vec{A}|^2 + (x+y)\vec{A} \cdot \vec{B} + y|\vec{B}|^2$   
 $= x + (x+y) \times 1 \times 2 \times \cos 60^\circ + y \times 4$   
 $= x + (x+y) + 4y = 2x + 5y$

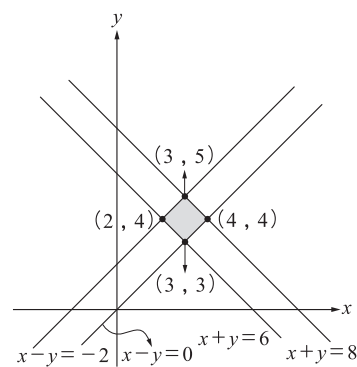
利用線型規劃概念, 作圖如右:

$(x, y)$	(3, 3)	(4, 4)	(2, 4)	(3, 5)
$2x + 5y$	21	28	24	31

$\therefore$  最大值 = 31

**難易度** 易偏中

**類似題** 《大滿貫複習講義·數學 1-4 冊》第 151 頁範例 6



G. 設銳角三角形  $ABC$  的外接圓半徑為 8。已知外接圓圓心到  $\overline{AB}$  的距離為 2, 而到  $\overline{BC}$  的距離為 7, 則  $\overline{AC} = \underline{29\sqrt{3031}}$ 。(化成最簡根式)

**答案** 29 4 30 1 31 5

**命題出處** 第三冊第一章 三角函數

**測驗目標** 和角公式與正弦定理

**解析** 如圖, 設  $\angle OBM = \theta_1$ ,  $\angle OBN = \theta_2$

$$\Rightarrow \overline{BM} = \sqrt{BO^2 - OM^2} = \sqrt{8^2 - 2^2} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$$

$$\overline{BN} = \sqrt{BO^2 - ON^2} = \sqrt{8^2 - 7^2} = \sqrt{15}$$

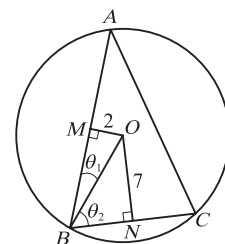
$$\therefore \cos \theta_1 = \frac{2\sqrt{15}}{8} = \frac{\sqrt{15}}{4}, \sin \theta_1 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\cos \theta_2 = \frac{\sqrt{15}}{8}, \sin \theta_2 = \frac{7}{8}$$

$$\Rightarrow \sin(\angle ABC) = \sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{15}}{8} + \frac{\sqrt{15}}{4} \times \frac{7}{8} = \frac{8\sqrt{15}}{32} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

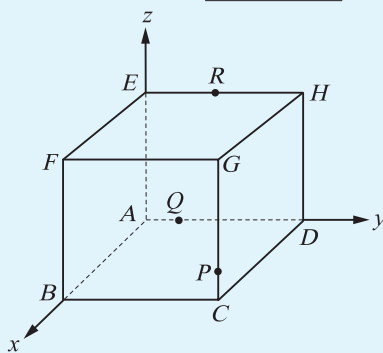
$$\therefore \text{利用正弦定理} \Rightarrow \frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ABC)} = 2R \Rightarrow \overline{AC} = 2 \times 8 \times \frac{\sqrt{15}}{4} = 4\sqrt{15}$$



難易度 中

類似題 《大滿貫複習講義·數學 1-4 冊》第 128 頁範例 7

H. 如下圖，在坐標空間中， $A, B, C, D, E, F, G, H$  為正立方體的八個頂點，已知其中四個點的坐標  $A(0, 0, 0)$ 、 $B(6, 0, 0)$ 、 $D(0, 6, 0)$  及  $E(0, 0, 6)$ ， $P$  在線段  $\overline{CG}$  上且  $\overline{CP} : \overline{PG} = 1 : 5$ ， $R$  在線段  $\overline{EH}$  上且  $\overline{ER} : \overline{RH} = 1 : 1$ ， $Q$  在線段  $\overline{AD}$  上。若空間中通過  $P, Q, R$  這三點的平面，與直線  $AG$  不相交，則  $Q$  點的  $y$  坐標為  $\frac{\textcircled{32}\textcircled{33}}{\textcircled{34}\textcircled{35}}$ 。(化成最簡分數)



答案  $\textcircled{32} 1$   $\textcircled{33} 5$   $\textcircled{34} 1$   $\textcircled{35} 1$

命題出處 第四冊第二章 空間中的直線與平面

測驗目標 空間中的平面與直線的相交狀況

解析 由題意圖得知  $A(0, 0, 0)$ 、 $G(6, 6, 6)$ 、 $P(6, 6, 1)$ 、 $R(0, 3, 6)$   
設  $Q(0, k, 0)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{平面 } PQR \text{ 法向量 } \vec{n} &= \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} \\ &= (-6, k-6, -1) \times (-6, -3, 5) \\ &= \left( \begin{vmatrix} k-6 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ 5 & -6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -6 & k-6 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} \right) \\ &= (5k-33, 36, 6k-18) \end{aligned}$$

直線  $AG$  的方向向量  $\vec{v} \parallel \overrightarrow{AG} = (6, 6, 6)$ ，取  $\vec{v} = (1, 1, 1)$

$\because$  平面  $PQR$  與直線  $AG$  不相交

$$\therefore \vec{n} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow 5k - 33 + 36 + 6k - 18 = 0$$

$$\therefore 11k - 5 = 0 \quad \therefore k = \frac{5}{11}$$

難易度 中偏難

類似題 《大滿貫複習講義·數學 1-4 冊》第 197 頁範例 1、第 203 頁範例 8

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為  $a$ ，公差為  $d$  的等差數列前  $n$  項之和為  $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為  $a$ ，公比為  $r (r \neq 1)$  的等比數列前  $n$  項之和為  $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

3.  $\triangle ABC$  的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$  ( $R$  為  $\triangle ABC$  外接圓半徑)

$\triangle ABC$  的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

4. 一維數據  $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，算術平均數  $\mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

$$\text{標準差 } \sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \left( \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - n\mu_X^2 \right)}$$

5. 二維數據  $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$

$$\text{相關係數 } r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$$

$$\text{迴歸直線 (最適合直線) 方程式 } y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$$

6. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$

7. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ， $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ ， $\log_{10} 7 \approx 0.8451$



數學  
分段學習

# 看過來!

覺得數學學習有困難嗎？翰林幫助您~

**階段式教學講義**

提供 **兩階段** 學習過程，讓您準備數學考試不再毫無頭緒，可輕鬆獲得平均以上的成績



**階段 1**

**溫故知新，學習焦點，初階檢定**

首先掌握全章節中最基礎且重要的概念與題型，即使沒有時間進入第2階段，一樣也能輕鬆面對考試。

**階段 2**

**進階範例，中高階檢定，歷年大考試題**

耀眼成績，就在這一個階段。有了階段1的扎實基礎之後，再加深加廣的題型演練，增強實力。

**優質  
配套**



最佳「課後作業本」，透過充分的演練，增強學習效果。



**翰林出版**  
HAN LIN PUBLISHING CO., LTD.

升學領導品牌



(產品封面以成書為準)

輕鬆學習得高分