

翰林 114分科測驗

精彩解析 數學 考科

西松高中／蘇惠玉 老師
文華高中／何欣翰 老師



Handler

總編輯 / 李心筠

企 編 / 高湘婷

責 編 / 吳崇欽 · 吳晉毅 · 黃美甄

美 編 / 李湘悌 · 歐詩好 · 林素儀

出 版 / 民國一十四年八月

發行所 / 7102008 臺南市新樂路76號

翰林官網 <https://www.hle.com.tw>

☞ 本書內容同步刊載於翰林官網

✔ 依據大考中心公布內容【試題·答案】

翰林 相信學習



一、前言

114 學年的分科測驗於 114 年 7 月 11 日與 12 日舉行，此次測驗共有 3 萬 9190 人報考，比 113 學年，112 學年皆略減，但高於 111 學年的報考人數。其中以選考數甲的考生最多，有 2 萬 3950 人，占總報名人數的 61.11%，而首次登場的數乙考科也有 1 萬 6955 人報名。以下為筆者綜合各教師解題團隊、考生意見以及筆者的個人經驗，提供以下分析給讀者們參考。

二、試題分析

(一) 試卷架構與配分

首先針對本次試卷所對應之單元比重，以及 113 年分科測驗數學甲之各冊占分，比較整理如下表。

冊別	單元名稱	題型	難易度	分數	114 年 分科測驗 各冊占分	113 年 分科測驗 各冊占分
第一冊	第一章 數與式				4 分	6 分
	第二章 指數、對數					
	第三章 多項式函數	非選 15	中	4		
	第四章 直線與圓					
第二冊	第一章 數列與級數				6 分	18 分
	第二章 數據分析					
	第三章 排列組合與 機率	單選 3	易	6		
	第四章 三角比	(多選 5)				



冊 別	單元名稱	題 型	難易度	分 數	114 年 分科測驗 各冊占分	113 年 分科測驗 各冊占分
第三冊 A	第一章 三角函數	單選 1	易	6	20 分	
		(多選 5)				
	第二章 指數與對數 函數	多選 6	中	8		
	第三章 平面向量	選填 11	中	6		
第四冊 A	第一章 空間向量	(選填 10)			20 分	26 分
	第二章 空間中的平 面與直線	單選 2	中偏易	6		
		選填 10	中	6		
	第三章 機率	非選 12	易	2		
	第四章 矩陣	選填 9	易	6		
選修 數學 甲(上)	第一章 極限與函數	多選 5	中偏易	8	24 分	20 分
	第二章 微分	多選 7	中偏難	8		
	第三章 積分	非選 16	中	2		
		非選 17	中偏難	6		
選修 數學 甲(下)	第一章 二次曲線	多選 4	易	8	26 分	30 分
	第二章 複數與多項 式方程式	多選 8	難	8		
	第三章 機率統計	非選 13	易	4		
		非選 14	中偏易	6		

(若題目有跨多個章節者，屬次要概念之單元，則以括號表示之，且不納入分數計算)

試題分析

從試卷架構來看，此次分科測驗維持往年的設計，有 3 題單選題 (18 分)、5 題多選題 (40 分)、3 題選填題 (18 分) 及 6 題 (2 大題) 的混合題或非選擇題 (24 分)。在各冊的配分上，今年的試卷與去年相比，更偏重在二、三年級分流之後的數學內容，一年級一、二冊的內容僅占 10 分，而二年級的 3A 與 4A 各占 20 分，數甲上下與去年相同占了 50 分。由於今年首次加入數乙考科，或許為了區分不同類組的學生，以自然組考生為主的數學甲測驗題目，評量問題的出處也著重於二、三年級分流之後的部分，這是否會是未來分科測驗的一個考試趨勢？值得我們多加留意與觀察。

單以各考題本身來看，今年試題依然遵循評量準則，每一類題都是由簡至難，讓考生在作答時可以較為輕鬆作答，很容易安排作答順序。筆者認為今年題目難易度與去年相當，整體偏易，沒有題意難理解的問題敘述，閱讀素養類的問題，像是單選 3 與非選 12~14 的題目敘述也簡單易懂，即使較難的問題也可依題目線索破題。整份試題僅有多選 8 較難解決，基本觀念好的考生有較大的機會取得高分。

(二) 試題特色

1. 評量的核心皆重視基本觀念：

近年來的大考在命題的設計上，其實都緊扣著基本觀念在做評量，沒有繁雜的計算。考生只要觀念熟練，能依據題意給出的條件與所求問題概念方向，即可容易破題作答。例如單選 1，依照對稱概念或圖形的平移作圖，就可快速解題。即使是較難的選填 11，也可循著向量加法的平行四邊形法，順利找到線性組合的解題方向。綜觀近年大考試題，無論學測還是分科測驗，熟練基本觀念才是解題的王道。

2. 出題多以整合或跨單元的綜合應用題目為主：

在今年的試題中，明顯可以看到跨單元的綜合應用題型較多，例如單選 3 結合幾何圖形的交點與排列組合的計算；多選 5 結合廣義角的三角比、數列以及極限單元；多選 8 結合複數、直線與三角；選填 10 結合空間概念與空間中的直線；非選 12~14 結合獨立事件、期望值與幾何分布；非選 15~17 結合多項式函數與積分。這些整合性的問題通常能測驗出學生基本概念的應用能力，往往也是較有鑑別度的題目類型。不過雖然混合了各單元的概念，無疑還是基本概念的掌握程度，在本次試題設計中，依照題意的條件就可從概念著手，算是相當容易破題與延續下去推論解題的題目設計。

3. 空間幾何的圖像理解很重要，多選題應注意選項順序的引導：

今年的試題中，有兩題空間幾何的相關問題，單選 2 與選填 10。在單選 2 中，如果空間觀念好的話，容易理解或想像出在正立方體中的垂直關係，這個問題就可迎刃而解，反之，如果選擇以建立坐標系的代數方法，可能需要花費較多時間。而選填 10 的基本關鍵在於空間中兩「平行」直線的距離，如果沒想到從三垂線定理著手，而執著於空間中直線距離的代數方法，可能就會覺得相當不易解決。空間幾何的問題，一般都是臺灣高中生普遍覺得困難的題目，要憑空想像出立體的空間圖形與其中的幾何關係確實不易，有賴平常多加練習。



另外，大考的多選題通常選項的安排都有其目的，有時候會有引導作答的作用，在碰到難題時格外有用。例如魔王題的多選 8，在不知如何解題的情況下，按照選項的引導順序作答，以選項作為解法的線索，按部就班就能順利解出。

4. 教師對教材的補充有關鍵性的作用：

在今年的試題中，有兩題相對於課綱內容而言比較特殊的題目，多選 6 與多選 8。當然如果選擇按照課綱教材內容來處理也可以作答。例如多選 6，考慮 $y=1.2^x$ 與 $y=x$ 的交點，以及 $y=1.2^x$ 與 $y=\log_{1.2} x$ 是否相交，並透過繪圖來判斷，只要畫得準確，可得出 $y=1.2^x$ 與 $y=x$ 交於兩點，再利用對稱，可得到 $y=1.2^x$ 與 $y=\log_{1.2} x$ 相交於兩點。但是如果考生知道：

「當 $1 < a \leq 1.44 \dots = e^{\frac{1}{e}}$ 時， $y=a^x$ 與 $y=\log_a x$ 會相交 (當 $a=e^{\frac{1}{e}}$ 時兩者相切)」，這個問題就相當容易解決了。另外，這次的魔王題多選 8，有些學生應該會選擇用到三角函數的三倍角與二倍角公式來處理，但是如果用到三倍角公式，正式的課綱教材是沒有的，當然可以臨時由二倍角與和角公式推得，但若考生原本就知道三倍角公式的話，將可節省不少時間。不過這個問題比較好的解法是不需要用到三倍角公式的，詳見後續的試題解析。

5. 非選擇題的證明變多了：

在今年的試題中，題組的 15~17 題裡面有 2 題證明題，這在以往的試題中比較少見，而且是以嚴謹的「證明」形式論述。在 113 年的考題中，用的是偏向解題類的「說明」，而在 112 年的考題中，也僅有一題證明。以臺灣學生的習慣，通常沒有耐心好好訓練嚴謹的證明論述形式，因此通常證明題都是對學生較為不利的題型，因此也會是提高鑑別度的題目之一。在教學上，教師提供嚴謹論證形式參考，配合學生經常性的練習書寫，會是提高這類型題目得分的有效方法。

以今年考完試記者對學生的訪談來看，學生普遍覺得空間、複數、證明以及旋轉體體積的題目較難處理，這些題目應該也是整份試題中用以區分高低分學生，具有鑑別度的試題。因應試題的出題方向與學生的學習困難點來調整教學策略，或是學生自己的學習與備考方向的調整，這是評量試題除了作為升學手段之外，所帶給教學現場的額外收穫。

三、歷年成績分析與預測

今年分科測驗數學甲的試題，著重基本概念而沒有繁雜的計算，又有不少簡易好得分的題目，難易度也與去年差不多，預測分數與去年相差無幾。在做分數預測時應該能以去年的五標與累積人數做為參考。

從大考中心的「113 學年度分科測驗成績相關統計資料說明會」中給出的資料可以看到幾個統計表格，首先是近幾年的級距變化，分科測驗採 60 級分制，將考生原始總分成績前 1% 的分數平均，再除以 60 就是一個級距，其中數學甲近年的級距如下表 1：

試題分析

表 1：近 3 年數學甲分數級距

學年度	113	112	111
級距	1.56867	1.36100	1.43700

級距較大表示該年前 1% 者的成績較高，試題相對簡單。以試題難易度預測，今年的試題與去年差不多，但是有多選 8 這個魔王題，以及一般學生普遍難拿高分的證明題，級距預測應該較去年低一些些。從近年五標來看，如下表 2，今年的五標應該會介於 113 年與 111 年之間。若從去年的原始總分與級分來對照，如表 3，今年原始分數 92 分應該就有 60 級分，原始分數 68 左右就有望達到頂標。

表 2：近 3 年數學甲級分五標

學年度	頂標	前標	均標	後標	底標
113	45	38	27	18	12
112	41	34	22	13	8
111	43	35	25	15	10

表 3：113 學年度數學甲原始分數與級分對照

級分	60	59	58	57	56
級距	$92.55 < X \leq 100.00$	$90.98 < X \leq 92.55$	$89.41 < X \leq 90.98$	$87.85 < X \leq 89.41$	$86.28 < X \leq 87.85$
級分	55	54	53	52	51
級距	$84.71 < X \leq 86.28$	$83.14 < X \leq 84.71$	$81.57 < X \leq 83.14$	$80.00 < X \leq 81.57$	$78.43 < X \leq 80.00$
級分	50	49	48	47	46
級距	$76.86 < X \leq 78.43$	$75.30 < X \leq 76.86$	$73.73 < X \leq 75.30$	$72.16 < X \leq 73.73$	$70.59 < X \leq 72.16$
級分	45	44	43	42	41
級距	$69.02 < X \leq 70.59$	$67.45 < X \leq 69.02$	$65.88 < X \leq 67.45$	$64.32 < X \leq 65.88$	$62.75 < X \leq 64.32$
級分	40	39	38	37	36
級距	$61.18 < X \leq 62.75$	$59.61 < X \leq 61.18$	$58.04 < X \leq 59.61$	$56.47 < X \leq 58.04$	$54.90 < X \leq 56.47$
級分	35	34	33	32	31
級距	$53.33 < X \leq 54.90$	$51.77 < X \leq 53.33$	$50.20 < X \leq 51.77$	$48.63 < X \leq 50.20$	$47.06 < X \leq 48.63$

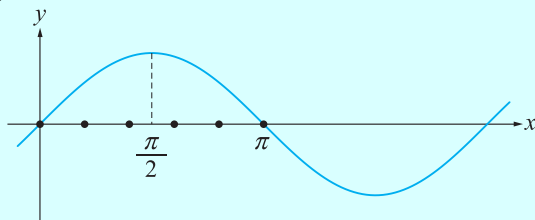


第壹部分、選擇(填)題(占76分)

一、單選題(占18分)

說明：第 1. 題至第 3. 題，每題 6 分。

1. 坐標平面上，函數 $y = \sin x$ 的圖形對稱於 $x = \frac{\pi}{2}$ ，如下圖所示。試選出在 $0 < \theta \leq \pi$ 的範圍中滿足 $\sin \theta = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{5}\right)$ 的 θ 值。



(1) $\frac{\pi}{5}$

(2) $\frac{2\pi}{5}$

(3) $\frac{3\pi}{5}$

(4) $\frac{4\pi}{5}$

(5) π

答 案：(2)

命題出處：第三冊 A 第一章 三角函數

測驗目標：正弦函數圖形的對稱性、函數圖形的平移

難 易 度：易

詳 解： $y = \sin x$ 的圖形在 $0 < \theta \leq \pi$ 時對稱於 $x = \frac{\pi}{2}$ ，當 $\sin \theta = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{5}\right)$ 時，

$$\text{亦即 } \frac{\theta + \left(\theta + \frac{\pi}{5}\right)}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\theta = \pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4\pi}{5} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{5}$$

故選(2)

【另解】

考慮圖形的平移，

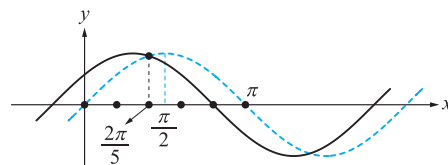
$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{5}\right)$ 為 $y = \sin x$ 的圖形向左平移 $\frac{\pi}{5}$

單位，作圖如右

可以看出當 $x = \theta = \frac{2\pi}{5}$ 時，兩者相交，

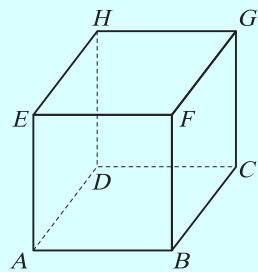
$$\text{即 } \sin \frac{2\pi}{5} = \sin\left(\frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{5}\right) = \sin \frac{3\pi}{5} = \sin\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right)$$

故選(2)



試題解析

2. 空間中一正立方體 $ABCD-EFGH$ ，其中頂點 $A、B、C、D$ 在同一個平面上，且 \overline{AE} 為其中一個邊，如右圖所示。下列選項中，試選出與平面 BGH 以及平面 CFE 皆垂直的平面。



- (1) 平面 ADH
- (2) 平面 BCD
- (3) 平面 CDG
- (4) 平面 DFG
- (5) 平面 DFH

答 案：(1)

命題出處：第四冊 A 第二章 空間中的平面與直線

測驗目標：熟悉空間中兩平面垂直的性質

難 易 度：中偏易

詳 解：建立空間坐標系，設邊長為 1，得 $A(1, 0, 0)$ 、 $B(1, 1, 0)$ 、 $C(0, 1, 0)$ 、 $D(0, 0, 0)$ 、 $E(1, 0, 1)$ 、 $F(1, 1, 1)$ 、 $G(0, 1, 1)$ 、 $H(0, 0, 1)$

可得平面 BGH 的法向量為

$$\vec{n}_1 \parallel \vec{BG} \times \vec{BH} = (-1, 0, 1) \times (-1, -1, 1) = (1, 0, 1)$$

平面 CFE 的法向量為

$$\vec{n}_2 \parallel \vec{FE} \times \vec{FC} = (0, -1, 0) \times (-1, 0, -1) = (1, 0, -1)$$

設與平面 BGH 及平面 CFE 皆垂直的平面法向量為 \vec{n}

$$\vec{n} \parallel \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (1, 0, 1) \times (1, 0, -1) = (0, 2, 0)$$

為平面 ADH 的法向量

故選(1)

【另解】

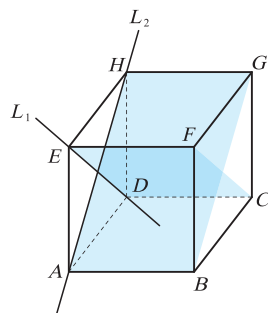
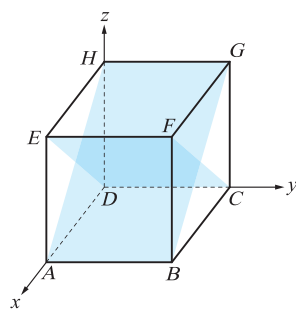
在正立方體中作圖，平面 BGH 即平面 $ABGH$ ，可以發現正方形 $ADHE$ 的對角線 $\overline{DE} \perp \overline{AH}$ ，且 $\overline{DE} \perp \overline{AB}$

(因為 $\overline{AB} \perp$ 平面 $ADHE$)，因此 \overline{DE} 為平面 BGH 的法向量

同理， \overline{AH} 為平面 CFE 的法向量，與 \overline{DE} 、 \overline{AH} 皆垂直的向量為 \overline{CD}

而 \overline{CD} 為平面 ADH 的法向量

故選(1)





3. 《幾何原本》上說：「給定相異兩點可決定一條直線」。一般來說，相異三點可決定 $C_2^3 = 3$ 條直線；但若這三點共線，此時僅決定一條直線。坐標平面上，已知圓 $\Gamma_1 : x^2 + y^2 = 4$ 與兩坐標軸交於 4 點、圓 $\Gamma_2 : x^2 + y^2 = 2$ 與直線 $x - y = 0$ 交於 2 點、圓 Γ_2 與直線 $x + y = 0$ 交於 2 點。試問這 8 點共可決定幾條不同的直線？

- (1) 12 (2) 16 (3) 20 (4) 24 (5) 28

答 案：(3)

命題出處：第二冊第三章 排列組合與機率

測驗目標：能判斷共線並求出組合數

難 易 度：易

詳 解：圓 $\Gamma_1 : x^2 + y^2 = 4$ 與兩坐標軸交於 $(2, 0)$ 、 $(0, 2)$ 、 $(-2, 0)$ 、 $(0, -2)$ 四點

圓 $\Gamma_2 : x^2 + y^2 = 2$ 與直線 $x - y = 0$ 交於 $(1, 1)$ 、 $(-1, -1)$ 兩點

圓 $\Gamma_2 : x^2 + y^2 = 2$ 與直線 $x + y = 0$ 交於 $(1, -1)$ 、 $(-1, 1)$ 兩點

其中 $(0, 2)$ 、 $(1, 1)$ 、 $(2, 0)$ 三點共線

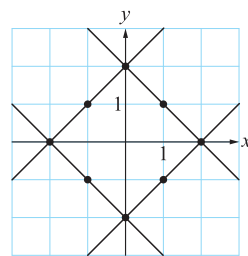
$(0, 2)$ 、 $(-1, 1)$ 、 $(-2, 0)$ 三點共線

$(-2, 0)$ 、 $(-1, -1)$ 、 $(0, -2)$ 三點共線

$(0, -2)$ 、 $(1, -1)$ 、 $(2, 0)$ 三點共線

因此共可決定 $C_2^8 - 4 \times C_2^3 + 4 = 28 - 12 + 4 = 20$

故選(3)



二、多選題 (占 40 分)

說明：第 4. 題至第 8. 題，每題 8 分。

4. 試從下列坐標平面上的二次曲線中，選出與所有的鉛直線都相交的選項。

(1) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

(2) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

(3) $-\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

(4) $y = \frac{4}{9}x^2$

(5) $x = \frac{4}{9}y^2$

答 案：(3)(4)

命題出處：選修數學甲(下)第一章 二次曲線

測驗目標：熟練二次曲線的圖形

難 易 度：易

試題解析

詳 解：畫出各選項中的圖形後判斷是否與所有鉛直線都相交

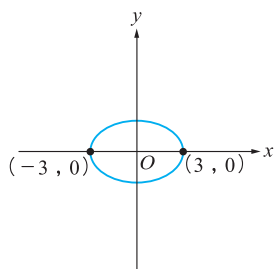
(1) \times : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 為橢圓，如圖(一)，且 $-3 \leq x \leq 3$ ，因此 $x > 3$ 或 $x < -3$ 的鉛直線與圖形不相交

(2) \times : $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ 為貫軸在 x 軸上的雙曲線，如圖(二)， $-3 < x < 3$ 的鉛直線與圖形不相交

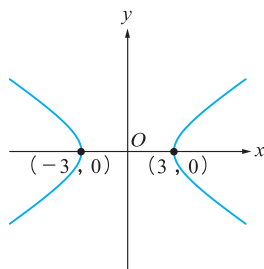
(3) \circ : $-\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 為貫軸在 y 軸上的雙曲線，如圖(三)，與所有的鉛直線皆相交

(4) \circ : $y = \frac{4}{9}x^2$ 為開口向上的拋物線，如圖(四)，與所有的鉛直線皆相交

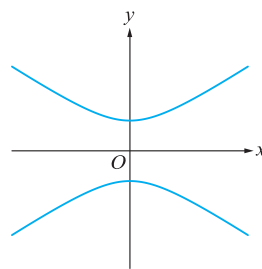
(5) \times : $x = \frac{4}{9}y^2$ 為開口向右的拋物線，如圖(五)， $x < 0$ 的鉛直線與圖形不相交



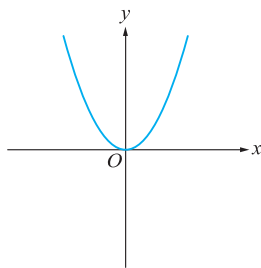
圖(一)



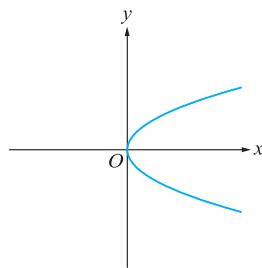
圖(二)



圖(三)



圖(四)



圖(五)

故選(3)(4)



5. 有一實數數列 $\langle a_n \rangle$ ，其中 $a_n = \cos\left(n\pi - \frac{\pi}{6}\right)$ ， n 為正整數。試選出正確的選項。

(1) $a_1 = -\frac{1}{2}$

(2) $a_2 = a_3$

(3) $a_4 = a_{24}$

(4) $\langle a_n \rangle$ 為收斂數列，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < 1$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^n = 3 - 2\sqrt{3}$

答 案：(3)(5)

命題出處：第三冊 A 第一章 三角函數、選修數學甲(上)第一章 極限與函數

測驗目標：判斷數列的規律與極限、無窮等比級數的極限值

難 易 度：中偏易

詳 解：(1) \times ： $a_1 = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) \times ： $a_2 = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$a_3 = \cos\left(3\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore a_2 \neq a_3$

(3) \circ ： $a_4 = \cos\left(4\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} = a_2$

$a_5 = \cos\left(5\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} = a_3 = a_1$

由以上規律，可以發現：

$$a_1 = a_3 = a_5 = \dots = a_{2n-1} = \dots = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a_2 = a_4 = a_6 = \dots = a_{2n} = \dots = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

故 $a_4 = a_{24}$

(4) \times ：由(3)可知， $\langle a_n \rangle = \left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \dots \right\rangle$

因此 $\langle a_n \rangle$ 為發散數列，極限不存在

試題解析

$$\begin{aligned}
 (5) \bigcirc : \sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^n &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 + \dots \\
 &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 + \dots \\
 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^n &\text{ 是公比為 } -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 的無窮等比級數，因為 } -1 < -\frac{\sqrt{3}}{2} < 1 \\
 &\text{ 所以級數收斂且和存在} \\
 \text{故 } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^n &= \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{-\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = -\sqrt{3}(2 - \sqrt{3}) = 3 - 2\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

故選(3)(5)

6. 設指數函數 $f(x) = 1.2^x$ 。試選出正確的選項。

- (1) $f(0) > 0$
- (2) $f(10) > 10$
- (3) 坐標平面上， $y = 1.2^x$ 的圖形與直線 $y = x$ 相交
- (4) 坐標平面上， $y = 1.2^x$ 與 $y = \log(1.2^x)$ 的圖形對稱於直線 $y = x$
- (5) 對任意正實數 b ， $\log_{1.2} b \neq 1.2^b$

答 案：(1)(3)

命題出處：第三冊 A 第二章 指數與對數函數

測驗目標：指數與對數函數圖形的性質與對稱性

難 易 度：中

詳 解：(1) \bigcirc : $f(0) = 1.2^0 = 1 > 0$

(2) \times : $f(10) = 1.2^{10}$ 與 10 比較大小，考慮取對數後來比較

$$\log(1.2)^{10} = 10 \times \log \frac{6}{5} \approx 10(0.7781 - 0.6990) = 0.791 < 1 = \log 10$$

因為 $y = \log x$ 為遞增函數，因此 $1.2^{10} < 10$ ，即 $f(10) < 10$

(3) \bigcirc : 在坐標平面上畫出 $y = 1.2^x$ 與 $y = x$ 的圖形，如右

圖，由圖形可知 $y = 1.2^x$ 與 $y = x$ 交於兩點

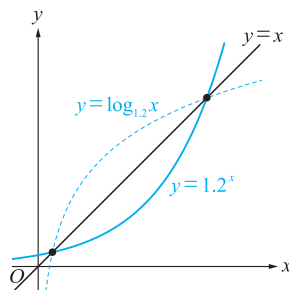
(4) \times : $y = 1.2^x$ 與 $y = \log(1.2^x)$ 不會對稱於直線 $y = x$

(1, 1.2) 在 $y = 1.2^x$ 上，但是 $x = 1.2$ 代入 $y = \log(1.2^x)$ ，得 $y = \log(1.2^{1.2}) \neq 1 = \log 10$

(5) \times : 由(3)知， $y = 1.2^x$ 與 $y = x$ 交於兩點，而 $y = 1.2^x$ 與

$y = \log_{1.2} x$ 對稱於直線 $y = x$ ，因此 $y = 1.2^x$ 與 $y = \log_{1.2} x$ 交於兩點，亦即存在正實數 b ，使得 $\log_{1.2} b = 1.2^b$

故選(1)(3)





7. 已知實係數多項式 $f(x)$ 的次數大於 5，且其最高次項係數為正。又 $f(x)$ 在 $x=1、2、4$ 處有極小值，且在 $x=3、5$ 處有極大值。根據上述，試選出正確的選項。

- (1) $f(1) < f(3)$
- (2) 存在實數 a, b 滿足 $1 < a < b < 2$ ，使得 $f'(a) > 0$ 且 $f'(b) < 0$
- (3) $f''(3) > 0$
- (4) 存在實數 $c > 5$ ，使得 $f'(c) > 0$
- (5) $f(x)$ 的次數大於 7

答 案：(2)(4)(5)

命題出處：選修數學甲(上)第二章 微分

測驗目標：能根據極值與微分判斷圖形的特徵

難 易 度：中偏難

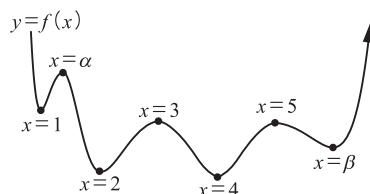
詳 解：根據極值與最高次項係數為正，可整理 $f'(x)$ 的正負與 $f(x)$ 的遞增減如下表

x	1	α	2	3	4	5	β
$f'(x)$	0	0	0	0	0	+	0
增減	↘	↗	↘	↗	↘	↗	↘

↑
↑
↑
↑
↑
↑
↑

極小值
極小值
極大值
極小值
極大值

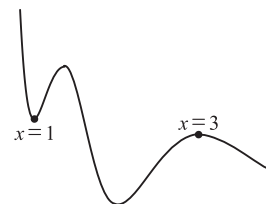
繪製 $y=f(x)$ 的簡圖如下



(1) ✕：函數的極小值不一定小於極大值，如右圖

(2) ○：實係數多項式函數為定義在所有實數的連續函數，且 $x=1, x=2$ 為極值點，因此在 $x=1$ 左右切線斜率有變化，同時在 $x=2$ 左右切線斜率有變化，亦即在 $x=1$ 附近，存在實數 $a > 1$ 且 $f'(a) > 0$

在 $x=2$ 附近，存在實數 $b, 1 < a < b < 2$ 且 $f'(b) < 0$



(3) ✕： $f(x)$ 在 $x=3$ 有極大值，表示在 $x=3$ 附近凹口向下，故 $f''(3) < 0$

(4) ○：因為 $f(x)$ 最高次項係數為正，圖形最右方上升，亦即當 x 越大時，函數值遞增，即 $f'(x) > 0$ ，故存在實數 $c > 5$ ，使得 $f'(c) > 0$

(5) ○：根據函數極值， $f'(x)$ 至少有因式

$$(x-1)(x-\alpha)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-\beta), \text{ 其中 } 1 < \alpha < 2, \beta > 5$$

因此可知 $f(x)$ 的次數大於 7 次

故選(2)(4)(5)

試題解析

8. 設複數 z 的虛部不為 0 且 $|z|=2$ 。已知在複數平面上， 1 、 z 、 z^3 共線。試選出正確的選項。

(1) $z \cdot \bar{z} = 2$

(2) $\frac{z^3-z}{z-1}$ 的虛部為 0

(3) z 的實部為 $-\frac{1}{2}$

(4) z 滿足 $z^2-z+4=0$

(5) 在複數平面上， -2 、 z 、 z^2 共線

答 案：(2)(3)(5)

命題出處：選修數學甲(下)第二章 複數與多項式方程式

測驗目標：熟悉複數平面與複數極式的性質

難 易 度：難

詳 解：(1) \times ： $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 4$

(2) \circ ：在複數平面上，可將一個複數視為點或位置向量

設 A 、 B 、 C 點分別代表的複數為 z 、 1 、 z^3 ，
且 A 、 B 、 C 三點共線

設 $z = a + bi$ ， $\vec{OA} = (a, b)$ ，因此可將 z 視為
 \vec{OA} ，同理 1 可視為 \vec{OB} ， z^3 可視為 \vec{OC}

如右圖，因此 $\vec{BA} = z - 1$ ， $\vec{AC} = z^3 - z$

即 $\vec{AC} \parallel \vec{BA}$ ，亦即 $z^3 - z = r(z - 1)$ ，

其中 r 為非零實數，亦即 $\frac{z^3 - z}{z - 1} = r \in \mathbb{R}$ ，因

此其虛部為 0

(3) \circ ：由(2)得 $\frac{z^3 - z}{z - 1} = \frac{z(z+1)(z-1)}{z-1} = z(z+1) = z^2 + z$ ，虛部為 0

$$z^2 + z = (a + bi)^2 + (a + bi) = (a^2 - b^2 + a) + (2ab + b)i$$

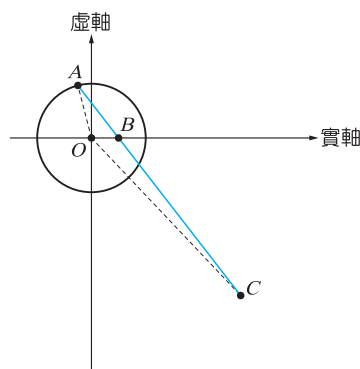
$$\text{得 } 2ab + b = 0,$$

$$\text{由於 } b \neq 0, \text{ 同除以 } b, \text{ 得 } 2a + 1 = 0, \text{ 故 } a = -\frac{1}{2}$$

$$\text{代回 } |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 2,$$

$$\text{得 } \frac{1}{4} + b^2 = 4 \Rightarrow b^2 = \frac{15}{4} \Rightarrow b = \pm \frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$\text{因此 } z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2}i, \text{ 其實部為 } -\frac{1}{2}$$





【另解】

設 $z=2(\cos \theta+i \sin \theta)$ ，

由(2)得 $\frac{z^3-z}{z-1}=\frac{z(z+1)(z-1)}{z-1}=z(z+1)=z^2+z$ ，虛部為 0

而 $z^2+z=4(\cos 2\theta+i \sin 2\theta)+2(\cos \theta+i \sin \theta)$ ，

其虛部為 $4 \sin 2\theta+2 \sin \theta=0$ ，即 $8 \sin \theta \cos \theta+2 \sin \theta=0$ ，

因為 $\sin \theta \neq 0$ ，兩邊同除以 $\sin \theta$ 得 $\cos \theta=-\frac{1}{4} \Rightarrow \sin \theta=\pm \frac{\sqrt{15}}{4}$

故 z 的實部為 $2 \cos \theta=-\frac{1}{2}$

(4) \times : $z^2-z+4=0$ 的根為 $\frac{1 \pm \sqrt{15}i}{2} \neq -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2}i$ ，因此 z 不滿足 $z^2-z+4=0$

(5) \circ : 由(2)知，若 $-2, z, z^2$ 共線 $\Leftrightarrow \frac{z^2-z}{z+2} \in \mathbb{R}$

當 $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{15}}{2}i$ 時，

$$\frac{z^2-z}{z+2}=\frac{z(z-1)}{z+2}=\frac{\frac{-1+\sqrt{15}i}{2} \times \frac{-3+\sqrt{15}i}{2}}{\frac{3+\sqrt{15}i}{2}}=\frac{-12-4\sqrt{15}i}{2(3+\sqrt{15}i)}=-2 \text{ 為實數，}$$

因此 $-2, z, z^2$ 共線

同理， $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{15}}{2}i$ 時，亦可得 $-2, z, z^2$ 共線

【另解】

在複數平面上，設 A, D, E 為分別代表 $z, -2, z^2$ 的點

① 當 $\cos \theta=-\frac{1}{4}$ ， $\sin \theta=\frac{\sqrt{15}}{4}$ ， $z^2=4(\cos 2\theta+i \sin 2\theta)$

$$\cos 2\theta=2 \cos ^2 \theta-1=-\frac{7}{8}, \sin 2\theta=2 \sin \theta \cos \theta=-\frac{\sqrt{15}}{8}$$

$$\Rightarrow A\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right), D(-2, 0), E\left(-\frac{7}{2}, -\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{AD}=\left(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{15}}{2}\right), \overrightarrow{AE}=(-3, -\sqrt{15}), \overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{AE}$$

故 A, D, E 共線，即在複數平面上， $-2, z, z^2$ 共線

試題解析

$$\textcircled{2} \text{ 當 } \cos \theta = -\frac{1}{4}, \sin \theta = -\frac{\sqrt{15}}{4}, z^2 = 4(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$$

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = -\frac{7}{8}, \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

$$\Rightarrow A\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{15}}{2}\right), D(-2, 0), E\left(-\frac{7}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$$

$$\vec{AD} = \left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right), \vec{AE} = (-3, \sqrt{15}), \vec{AD} \parallel \vec{AE}$$

故 $A、D、E$ 共線，即在複數平面上， $-2、z、z^2$ 共線

故選(2)(3)(5)

三、選填題 (占 18 分)

說明：第 9. 題至第 11. 題，每題 6 分。

9. 令 A 為以原點為中心逆時針旋轉 θ 角的旋轉矩陣，且令 B 為以 x 軸為鏡射軸 (對稱軸) 的鏡射矩陣。令 $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ 、 $BA = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}$ 。已知 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2(c_1 + c_2 + c_3 + c_4)$ ，則

$$\tan \theta = \frac{\textcircled{9-1} \textcircled{9-2}}{\textcircled{9-3}} \quad \text{。 (化為最簡分數)}$$

答 案： $\frac{-1}{2}$

命題出處：第四冊 A 第四章 矩陣

測驗目標：了解線性變換所對應的矩陣與矩陣運算

難 易 度：易

詳 解： A 為以原點為中心逆時針旋轉 θ 角的旋轉矩陣，故 $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$

$$B \text{ 為以 } x \text{ 軸為鏡射軸的鏡射矩陣，故 } B = \begin{bmatrix} \cos 0^\circ & \sin 0^\circ \\ \sin 0^\circ & -\cos 0^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\text{因此 } a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2 \cos \theta, c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = -2 \sin \theta$$

$$\text{故 } 2 \cos \theta = -4 \sin \theta$$

$$\text{則 } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-1}{2}$$



10. 坐標空間中一平面與平面 $x=0$ 、平面 $z=0$ 分別交於直線 L_1 、 L_2 。已知 L_1 、 L_2 互相平行，且 L_1 通過點 $(0, 2, -11)$ 、 L_2 通過點 $(8, 21, 0)$ ，則 L_1 、 L_2 的距離為

$\sqrt{\textcircled{10-1} \textcircled{10-2} \textcircled{10-3}}$ 。(化為最簡根式)

答 案： $\sqrt{185}$

命題出處：第四冊 A 第一章 空間向量、第四冊 A 第二章 空間中的平面與直線

測驗目標：空間中平面與直線的性質、三垂線定理

難 易 度：中

詳 解：一平面與平面 $x=0$ 、平面 $z=0$ 分別交於直線 L_1 、 L_2 ，

即 L_1 在 $yz(x=0)$ 平面， L_2 在 $xy(z=0)$ 平面，

又 $L_1 // L_2 \Rightarrow L_1, L_2$ 皆平行 y 軸

$A(0, 2, -11)$ 在 L_1 上， $B(8, 21, 0)$ 在 L_2 上

如右圖， A 在 y 軸上的投影點為 $A'(0, 2, 0)$ ，

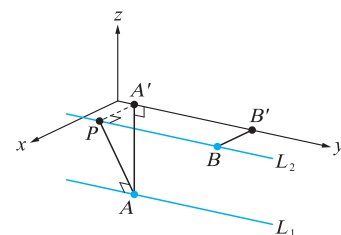
B 在 y 軸上的投影點為 $B'(0, 21, 0)$ ，

過 A' 作 L_2 的垂直線，垂足為 P 點，

由三垂線定理可知， $\overline{AP} \perp L_2$

又 $\overline{AA'} = 11$ ， $\overline{A'P} = \overline{BB'} = 8$ ，

故 L_1 、 L_2 的距離為 $d(L_1, L_2) = \overline{AP} = \sqrt{11^2 + 8^2} = \sqrt{185}$



11. 坐標平面上有一平行四邊形 Γ ，其中兩邊所在的直線與 $5x-y=0$ 平行、另兩邊所在的直線與 $3x-2y=0$ 垂直。令 Γ 的兩對角線交點為 Q 。已知 Γ 有一頂點 P ，滿足 $\overrightarrow{PQ} = (10, -1)$ ，

則 Γ 的面積為 $\textcircled{11-1} \textcircled{11-2} \textcircled{11-3}$ 。

答 案：204

命題出處：第三冊 A 第三章 平面向量

測驗目標：向量的線性組合

難 易 度：中

試題解析

詳 解：設平行四邊形 $PRST$ 兩邊 \overline{PT} 、 \overline{RS} 平行 $5x-y=0$ ，

\vec{u} 為 \overline{PT} 上的一個向量，可令 $\vec{u} = (1, 5)$

設平行四邊形兩邊 \overline{PR} 、 \overline{TS} 垂直 $3x-2y=0$ ，

亦即平行直線 $2x+3y=0$ ， \vec{v} 為 \overline{PR} 上的一個向量，

可令 $\vec{v} = (3, -2)$

又設 $\overline{PT} = \alpha \vec{u}$ ， $\overline{PR} = \beta \vec{v}$

$\Rightarrow \overline{PS} = 2\overline{PQ} = (20, -2) = \alpha(1, 5) + \beta(3, -2)$

可得 $\begin{cases} \alpha + 3\beta = 20 \\ 5\alpha - 2\beta = -2 \end{cases}$ ，解聯立得 $\alpha = 2$ ， $\beta = 6$

即 $\overline{PT} = 2(1, 5) = (2, 10)$ ， $\overline{PR} = 6(3, -2) = (18, -12)$

故平行四邊形 $PRST$ 面積為 $\begin{vmatrix} 2 & 18 \\ 10 & -12 \end{vmatrix} = |-24 - 180| = 204$

【另解】

已知平行四邊形兩邊平行 $5x-y=0$ ，

兩邊垂直 $3x-2y=0$ ，亦即平行直線 $2x+3y=0$

設頂點 P 為坐標平面的原點，對角線交點 $Q(10, -1)$

Q 為 P 、 S 的中點，故 $S(20, -2)$

設 $\overrightarrow{PT} : 5x-y=0$ 、 $\overrightarrow{PR} : 2x+3y=0$ (過 $P(0, 0)$)

$\overrightarrow{RS} : 5x-y=k$ 、 $\overrightarrow{TS} : 2x+3y=u$ ，過 $S(20, -2)$ 代入，得

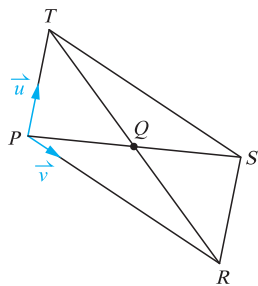
$\overrightarrow{RS} : 5x-y=102$ ， $\overrightarrow{TS} : 2x+3y=34$

可得頂點坐標 R 滿足 $\begin{cases} 2x+3y=0 \\ 5x-y=102 \end{cases}$ 、 T 滿足 $\begin{cases} 5x-y=0 \\ 2x+3y=34 \end{cases}$

解聯立得 $R(18, -12)$ ， $T(2, 10)$

故 $\overline{PT} = (2, 10)$ ， $\overline{PR} = (18, -12)$

故平行四邊形 $PRST$ 面積為 $\begin{vmatrix} 2 & 18 \\ 10 & -12 \end{vmatrix} = |-24 - 180| = 204$





第貳部分、混合題或非選擇題 (占 24 分)

說明：本部分共有 2 題組，選擇題每題 2 分，非選擇題配分標於題末。限在標示題號的作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶(液)。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

12-14 題為題組

某商店以抽獎方式販售一熱門公仔，每次抽獎都互相獨立且抽中的機率為 $\frac{2}{5}$ 。參加者可用以下兩種方式參加抽獎。

方式一：先付 225 元得到兩次抽獎機會，只要抽中即停止抽獎且得到一個公仔；若這兩次皆未抽中，則必須再多付 75 元得到一個公仔。

方式二：抽獎次數不限，每抽獎一次付 100 元。

根據上述，試回答下列問題。

12. 若以方式一抽獎，則共需付 300 元才能得到一個公仔的機率為何？(單選題，2 分)

- (1) $\left(\frac{2}{5}\right)^2$
- (2) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$
- (3) $\left(\frac{3}{5}\right)^2$
- (4) $\left(\frac{3}{5}\right)^3$
- (5) $\left(\frac{2}{5}\right) \times \left(\frac{3}{5}\right)^2$

答 案：(3)

命題出處：第四冊 A 第三章 機率

測驗目標：獨立事件的機率

難 易 度：易

詳 解：共需付 300 元才能得到一個公仔，表示付 225 元的兩次抽獎機會均沒有抽中，

故機率為 $\left(\frac{3}{5}\right)^2$ ，選(3)

試題解析

13. 若以方式二抽獎直到抽中一個公仔為止，試依期望值定義，使用 Σ 符號表示所需抽獎次數的期望值，並求其值。(非選擇題，4 分)

答 案： $\sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} \left(\frac{2}{5}\right)$ ， $\frac{5}{2}$ 次

命題出處：選修數學甲(下)第三章 機率統計

測驗目標：能寫出隨機變數的期望值，並求出幾何分布的期望值

難 易 度：易

詳 解：設隨機變數 X 表示直到抽中一個公仔為止所需的抽獎次數，

抽中公仔表示成功，成功機率為 $\frac{2}{5}$

則 X 的機率分布表如下

x	1	2	3	……	k	……
$p(x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5} \times \frac{2}{5}$	$\left(\frac{3}{5}\right)^2 \times \frac{2}{5}$	……	$\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} \times \frac{2}{5}$	……

抽獎次數的期望值為

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times \frac{2}{5} + 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + 3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 \times \frac{2}{5} + \cdots + k \times \left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} \times \frac{2}{5} + \cdots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} \left(\frac{2}{5}\right) \end{aligned}$$

且 $X \sim G\left(\frac{2}{5}\right)$ ，因此期望值 $E(X) = \frac{1}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{2}$ (次)

14. 假設花費金額不設限直到得到一個公仔為止，試分別求出這兩種抽獎方式得到一個公仔所需付金額的期望值，並說明這兩個期望值的大小關係。(非選擇題，6 分)

答 案： $E(\text{方式一}) = 252$ 元， $E(\text{方式二}) = 250$ 元， $E(\text{方式一}) > E(\text{方式二})$

命題出處：選修數學甲(下)第三章 機率統計

測驗目標：能求出隨機變數的期望值

難 易 度：中偏易

詳 解：方式一的期望值 $E(\text{方式一}) = 225 \times \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5}\right) + 300 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2$

$$= 225 \times \frac{16}{25} + 300 \times \frac{9}{25} = 252 \text{ (元)}$$

承 13.，設隨機變數 Y 表示方式二所需付的金額 $\Rightarrow Y = 100X$

方式二的期望值 $E(\text{方式二}) = E(Y) = 100E(X) = 100 \times \frac{5}{2} = 250 \text{ (元)}$

故 $E(\text{方式一}) > E(\text{方式二})$



15-17 題為題組

設實係數多項式函數 $f(x) = 3ax^2 + (1-a)$ ，其中 $-\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ 。在坐標平面上，令 Γ 為 $y=f(x)$ 與 x 軸在 $-1 \leq x \leq 1$ 所圍的區域。根據上述，試回答下列問題。

15. 證明當 $-1 \leq x \leq 1$ 時， $f(x) \geq 0$ 皆成立。(非選擇題，4 分)

答 案：略

命題出處：第一冊第三章 多項式函數

測驗目標：根據條件討論二次函數圖形的正負

難 易 度：中

詳 解： $f(x) = 3ax^2 + (1-a)$ 為二次函數，其中 $-\frac{1}{2} \leq a \leq 1$

① $0 < a \leq 1$

此時 $y=f(x)$ 的圖形為開口向上的拋物線，頂點為 $(0, 1-a)$

因此當 $x=0$ 時， $f(x)$ 有最小值為 $1-a \geq 0$

即當 $-1 \leq x \leq 1$ 時， $f(x) \geq f(0) = 1-a \geq 0$

② $a=0$

對任意 x ， $f(x)=1$ ，即當 $-1 \leq x \leq 1$ 時， $f(x) \geq 0$ 成立

③ $-\frac{1}{2} \leq a < 0$

此時 $y=f(x)$ 的圖形為開口向下的拋物線，頂點為 $(0, 1-a)$

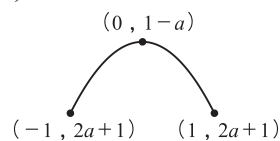
又因為 $-\frac{1}{2} \leq a < 0$ ， $-1 \leq 2a < 0$ ，因此 $2a+1 \geq 0$

當 $-1 \leq x \leq 0$ 時， $f(x) \geq f(-1) = 2a+1 \geq 0$

當 $0 < x \leq 1$ 時， $f(x) \geq f(1) = 2a+1 \geq 0$

故當 $-1 \leq x \leq 1$ 時， $f(x) \geq 0$

由①、②、③可知，當 $-1 \leq x \leq 1$ 時， $f(x) \geq 0$ 皆成立



16. 證明對於所有 $a \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ ， Γ 的面積皆為 2。(非選擇題，2 分)

答 案：略

命題出處：選修數學甲(上)第三章 積分

測驗目標：能計算曲線下圖形的面積

難 易 度：中

詳 解： Γ 為 $y=f(x)$ 與 x 軸在 $-1 \leq x \leq 1$ 所圍的區域

由 15. 題知，當 $-1 \leq x \leq 1$ 時， $f(x) \geq 0$

因此 Γ 的面積為 $\int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 [3ax^2 + (1-a)] dx$

$$= 2[ax^3 + (1-a)x] \Big|_0^1$$

$$= 2(a + (1-a) - 0) = 2$$

試題解析

17. 令 V 為 Γ 繞 x 軸旋轉所得旋轉體的體積。試問對所有 $a \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ ， V 是否都相等？若相等，則求其值；若不相等，則當 a 為多少時， V 有最大值，並求此最大值。(非選擇題，6 分)

答 案：當 $a=1$ 時， V 有最大值 $\frac{18\pi}{5}$

命題出處：選修數學甲(上)第三章 積分

測驗目標：能求出旋轉體的體積

難 易 度：中偏難

詳 解： V 為 Γ 繞 x 軸旋轉所得的旋轉體的體積

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^1 \pi [3ax^2 + (1-a)]^2 dx \\ &= 2 \times \pi \int_0^1 [3ax^2 + (1-a)]^2 dx \\ &= 2\pi \left(\int_0^1 [9a^2x^4 + 6a(1-a)x^2 + (1-a)^2] dx \right) \\ &= 2\pi \left[\frac{9}{5}a^2x^5 + 2a(1-a)x^3 + (1-a)^2x \right] \Big|_0^1 \\ &= 2\pi \left[\frac{9}{5}a^2 + 2a(1-a) + (1-a)^2 \right] \\ &= 2\pi \left(\frac{4}{5}a^2 + 1 \right) \end{aligned}$$

因此對所有 $a \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ ， V 的值根據 a 而決定，並不相等

且當 $a=1$ 時， V 有最大值 $2\pi \times \left(\frac{4}{5} + 1\right) = \frac{18\pi}{5}$



參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為 a ，公比為 r ($r \neq 1$) 的等比數列前 n 項之和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 級數和： $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ； $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

3. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
 $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
 $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

4. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑)

$\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

5. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$,

算術平均數 $\mu_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ；標準差 $\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\mu_X^2 \right)}$

6. 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$,

相關係數 $r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

最適直線 (迴歸直線) 方程式 $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$

7. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$

8. 對數值： $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ， $\log 5 \approx 0.6990$ ， $\log 7 \approx 0.8451$

9. 若 $X \sim B(n, p)$ 為二項分布，則期望值 $E(X) = np$ ，變異數 $\text{Var}(X) = np(1-p)$ ；

若 $X \sim G(p)$ 為幾何分布，則期望值 $E(X) = \frac{1}{p}$ ，變異數 $\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$ 。