翰林 113分科測驗

精彩解析 數學甲考科

師大附中／盧裕鵬 老師

總編輯／李心筠
企　編／高湘婷
責　編／吳崇欽・羅蔣偉
美　編／李湘悌・歐詩妤・林素儀
出　版／民國一一三年八月
發行所／702008 臺南市新樂路76號
翰林官網https://www.hle.com.tw
本書內容同步刊載於翰林官網

依據大考中心公布內容【試題・答案】

翰林 相信學習

試題分析

數學甲
師大附中／盧裕鵬　老師

一、前　言

113 年的分科測驗於 7 月 12 日（五）至 7 月 13 日（六）舉行，是自 108 課綱上路後，由指考轉型為分科測驗後的第三屆升大學考試。今年共計有 42,141 人報名分科測驗，與 112 年的 42,257 人只少 100 人左右，考生人數幾乎不變，但比 111 學年度 (2 萬 9 千人) 還高。

其中 113 年數學甲的應考人數為 24,921 人，而 112 年數學甲的應考人數則為 25,251 人，減幅為 1.3 %。今年試卷的整體難易度看起來比去年更平易近人，沒有所謂的難題，都以 108 課綱的基本觀念為主軸設計題目，考題所評量的概念，多是平時複習時常會提醒的重要觀念，跨單元與計算量大的題目明顯減少，也沒有特別刁難學生的困難題，但因為今年考生人數與去年相近，題目難易度中偏易，粗估今年五標的狀況，會比去年增加 5 至 8 分。以下筆者將從本次測驗的試題組成分布開始談起，再分述試題的特色與個人的看法，供讀者們參考。

二、試題分析

（一）試卷架構與配分

針對本次試卷所對應之單元，以及 112 年分科測驗數學甲之各冊占分，整理如下表。

<table>
<tr><th>冊　別</th><th>單元名稱</th><th>題　型</th><th>難易度</th><th>分　數</th><th>113 年
分科測驗
各冊占分</th><th>112 年
分科測驗
各冊占分</th></tr>
<tr><td rowspan="5">第一冊</td><td>第一章
數與式</td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="5">6 分</td><td rowspan="5">8 分</td></tr>
<tr><td>第二章
指數、對數</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>第三章
多項式函數</td><td>(多選 5)</td><td>中</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">第四章
直線與圓</td><td>選填 10</td><td>易</td><td>6 分</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

冊　別	單元名稱	題　型	難易度	分　數	113 年分科測驗各冊占分	112 年分科測驗各冊占分
第二冊	第一章 數列與級數	選填 11	中	6 分	18 分	12 分
	第二章 數據分析					
	第三章 排列組合與機率	單選 3	易	6 分		
	第四章 三角比	單選 1	易	6 分		
		(選填 10)	易			
第三冊 A	第一章 三角函數	(多選 7)	中			14 分
	第二章 指數與對數函數	(多選 4)	中			
		(選填 11)	中			
	第三章 平面向量					
第四冊 A	第一章 空間向量	多選 6	中	8 分	26 分	20 分
		非選 13	中偏易	4 分		
	第二章 空間中的平面與直線	非選 12	易	4 分		
		(非選 13)	中偏易			
		非選 14	中偏難	4 分		
	第三章 機率					
	第四章 矩陣	選填 9	中	6 分		
		(多選 12)	易			
選修數學甲(上)	第一章 極限與函數	(多選 8)	中		20 分	24 分
	第二章 微分	多選 7	中	8 分		
		非選 15	易	2 分		
		非選 16	易	4 分		
	第三章 積分	非選 17	中	6 分		

<table>
<tr><th>冊　別</th><th>單元名稱</th><th>題　型</th><th>難易度</th><th>分　數</th><th>113 年
分科測驗
各冊占分</th><th>112 年
分科測驗
各冊占分</th></tr>
<tr><td rowspan="4">選修
數學
甲(下)</td><td>第一章
二次曲線</td><td>單選 2</td><td>易</td><td>6 分</td><td rowspan="4">30 分</td><td rowspan="4">22 分</td></tr>
<tr><td rowspan="2">第二章
複數與多項
式方程式</td><td>多選 5</td><td>中</td><td>8 分</td></tr>
<tr><td>多選 8</td><td>中</td><td>8 分</td></tr>
<tr><td>第三章
機率統計</td><td>多選 4</td><td>中</td><td>8 分</td></tr>
</table>

（若題目有跨多個章節者，屬次要概念之單元，則以括號表示之，且不納入分數計算）

從試卷架構來看，此次分科測驗維持往年的設計，有 3 題單選題（18 分）、5 題多選題（40 分）、3 題選填題（18 分）及 6 題（2 大題）的混合題或非選擇題（24 分）。在各冊的配分上，今年的試卷與去年相比，更是偏重在第四冊 A、選修數學甲（上）及選修數學甲（下）這三冊部分，合計占了 76 分。較特別的是，第三冊 A 幾乎沒題目出現，向量的部分更著重在第四冊 A 的空間向量，因此大大提升了後三冊的占分，尤其是選修數學甲(下)更提升了 8 分。

單以各考題本身來看，筆者認為今年題目並沒有難易度歸類為難的題目，難易度多半是中或易，最難的題目也僅止於中偏難，每道題目的解題線索都很明確，一般認知較複雜的多選題與混合題，也都有做到循序漸進、由淺入深的設計，故相信考生在看到題目的當下，都能有一些想法可以動手解題，應該較少會發生望著題目卻束手無策的狀況。不但沒有難易度列為難的題目，難易度屬於易的題目也大大的提升，這表示考生只要細心地思考與作答，要取得高分的機會是很大的。

（二）試題特色

1. 評量的核心皆重視基本觀念：

近年來的大考在命題的設計上，其實都緊扣著基本觀念在做評量，縱使描述方式不常見或題目看似複雜，但仍是緊扣著這樣的原則即可解題。且今年跨單元題目也較去年少了，常以某一單元的重要觀念來出題，不像 112 年多選 8 結合了複數、共軛複數、極式以及解複數根，解題觀念需求較多；以今年的選填 10 為例，只要依題意作圖再運用斜角，即可輕鬆解題，如此簡單的題目出現在選填題是不常見的；選填 11 則是對數結合等差數列，運用題目給的訊息稍加代入討論，也可以解出答案，完全不用什麼巧妙的技巧才能處理。所以不需要追求過度包裝的人工難題，只要能夠將基本觀念掌握清楚，都能夠順利地做完試題。

2. 選修數學甲的內容比例偏多：

在高中六冊的數學，今年試題在選修數學甲的部分就占了 50 分，回顧 112 年的分科測驗，選修數學甲的部分也占有 46 分。由此可知，選修數學甲一直是分科測驗的命題重點。單選 2，多選 4、5、7、8，混合題 15～17，皆是選修數學甲的相關題目。

其中多選 5、7、8，混合題 15～17 算是常見的題目；值得一提是多選 4，考了高中 108 課綱機率質量函數中的幾何分布。混合題 15～17 完全以課堂上常用來學習的題目直接命題，對大部分的學生來說要拿高分是不成問題的。雖然高三選修數學甲的命題占分高，但題目卻是相當的平易近人，考生只要能細心地分析小心計算，再配合各選項的提問引導，在計算量不多的情況下，多半能夠順利作答，考生應該是有信心拿高分的。

針對題目計算量的狀況而言，筆者認為今年除了混合題 12、14 題外，多選題 4～7 感覺好像計算量大，但有些過程是重複計算，所以各題的計算量均在可接受的範圍內；當然混合題 12 題也可以用三平面直接去求交點，或許能減少計算量，只因混合題 13～14 會用到 12 題的三直線的方向向量，所以筆者在試題解析上才先行解出三直線，如此計算量就有所增加，但對 13、14 題是可以減少計算量，這其中的拿捏就由讀者去判斷。

3. 混合題目多為程序性，題目的排列由易到難的設計：

今年的試題中，從單選到混合題的題組皆是由易到難，除了混合題一步步引導考生作答的程序性設計外，多選題每一個選項大都獨立評量 108 課綱各單元的基礎觀念，因此只要考生在每個單元都能確實了解公式，知道每個單元所要學習的觀念與應用，所需要處理的難度都不算高；而對於程序性設計的手寫混合題，考生只要依循題意逐步地解題，便能夠確實地取得分數。

4. 重視與幾何意涵的連結：

在單選 1、2，多選 6、選填 10 及兩大題混合題，如能適當連結問題背後的幾何意涵，將有助於掌握題目的核心概念。尤其混合題 12～14 乍看之下很複雜，但若對空間向量、內積求角度的幾何意義有清楚的概念，循序漸進不會因計算量稍顯大而影響解題；選填 10 亦是只要在坐標平面上依題意畫出圓與直線的關係，再運用斜角就能直接求出答案。因此考生們在數學的學習上，除了熟練代數的演算以外，多多連結其背後的幾何意涵，也是很重要的訓練。

5. 命題呼應新課綱的變革：

針對 108 課綱強調或新增的條目，近兩年的考題都會配合命題，如新課綱選修數學甲(上)強調導數與定積分，則在 113 年的題組 15～17、112 年的題組 13、14 有出現；而選修數學甲(下)第三章機率中的幾何分布，在 113 年的多選 4 出現了。因此，未來考生在準備分科測驗考試時，針對 108 課綱與 99 課綱差異的部分可以特別留意與複習，諸如：「自然常數 e」、「牛頓求根法」、「連續函數值的平均」等，都是以往課綱沒有且尚未出現於大考中，可以多加留意，當然第三冊 A 今年未被出題，在未來也是值得注意的。

三、結　論

分科測驗作為升大學的最後一個管道，且是以測驗考生是否具有進階學科知識為主的測驗，整體難度通常會比學測更高一些 (筆者今年覺得兩考試難度相當)，並且取材的範圍也偏重在高中的後三冊，占了近七成的分數，今年更高至 76 分，表示未來欲參加分科測驗的考生，必定需要好好將高二下學期及高三的課程學好。有些學生常會為了專心準備學測而放棄高三課程的學習，這樣的方式如果要面對分科測驗，將會出現相當大的挑戰，不可不慎。

今年分科測驗數學甲的試題，在計算量上有稍為減少，就各個題目本身來看，都是設計良好的試題，沒有過度的人工包裝，且都緊扣著基本觀念進行評量，對於學生的學習態度是有正向影響。以整份試卷來評價，這是一份合適的試卷。

引用大考中心網站公告之「112 學年度分科測驗成績相關統計資料說明會」資料中「歷年五標與級分人數百分比分布圖」如下所示，看得出來大考中心近年來的試卷在分數的鑑別狀況是呈現穩定的，每個級分背後的人數比例不會有過大的落差。然今年因題目難易度以中、易居多，因此我們可以合理推估，113 年五標可能會比 112 年五標提升 5 至 8 分。

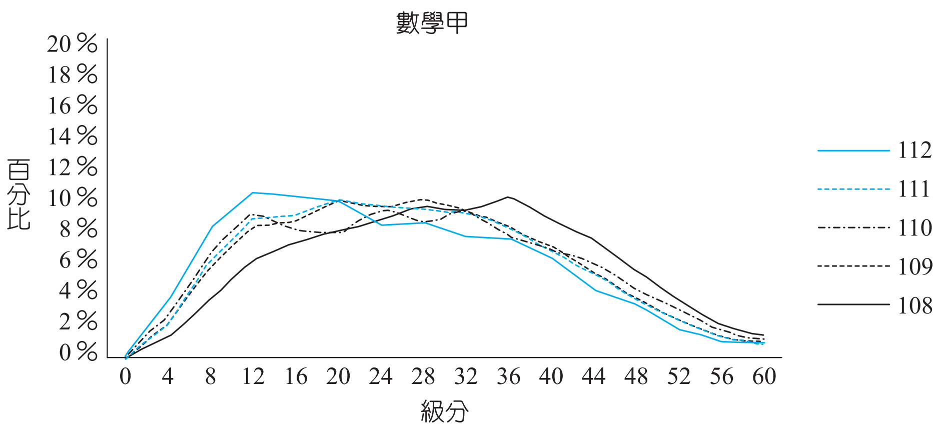
表 1　**歷年五標與級分人數百分比分布圖：數學甲**

學年度	頂標	前標	均標	後標	底標	頂標－底標	前標－後標
112	41	34	22	13	8	33	21
111	43	35	25	15	10	33	20
110	44	37	26	15	9	35	22
109	43	35	25	16	10	33	19
108	45	39	29	19	12	33	20
5 年平均	43.2	36.0	25.4	15.6	9.8	33.4	20.4
112－（5 年平均）	－2.2	－2.0	－3.4	－2.6	－1.8	－0.4	0.6

學年度	頂標		底標		頂標－底標		前標－後標	
	最高	最低	最高	最低	最高	最低	最高	最低
112		▽		▽		▽		
111						▽		
110					◎		◎	
109						▽		▽
108	◎		◎			▽		

註：◎係指 108～112 學年度間的最高級分；▽則是最低級分。

（本表取自大考中心「112 學年度分科測驗成績相關統計資料說明會」資料）



說明：112 分科測驗數學甲級分人數百分比分布，中高分群與 109 指考、111 分科測驗接近，五標中的頂標與前標也與 109 指考、111 分科測驗接近；（頂標－底標）與（前標－後標）比 5 年平均分別減少 0.4 級分與增加 0.6 級分。

（本圖取自大考中心「112 學年度分科測驗成績相關統計資料說明會」資料）

因此若以原始成績來看（如表 2），今年題目難易度為中與易偏多的情況下，筆者保守推估在通常情形下，分科測驗數學甲的原始成績凡達 75 分即可為頂標、達 60 分為前標、達 50 分為均標。換句話說，未來考生在面對分科測驗的考試時，可以考慮以 75 分做為頂標的基準來評估如何答題。就今年在 80 分鐘內寫完整份試卷或許仍存在壓力，但因題目難易度不高，計算量在可接受的範圍內，答對率相對也會增加，得分也會提高，所以心中先訂個較高的基準成績，在考試時便可做適當的取捨，讓自己有充分的時間可以處理較為拿手的問題，筆者認為是一個可行且取得較高分的應試策略。

表 2　**歷年數學甲五標及其對應原始得分**

學年度	頂標	前標	均標	後標	底標
112	$54.44<X\leq 55.80$	$44.91<X\leq 46.27$	$28.58<X\leq 29.94$	$16.33<X\leq 17.69$	$9.53<X\leq 10.89$
111	61	49	35	21	13
110	67	55	38	22	12
109	60	50	36	22	13
108	67	57	43	27	18

再換個角度，我們來關心決定級距的前 1 %考生成績，假設每個級分背後的人數比例維持穩定，從大考中心的資料可查得，112 年分科測驗數學甲的原始總分是落在 $76.34<X\leq 100$ 這個區間者，就會是前 1 %的考生，共計有 253 人。這意味者數學甲總計 100 分的試卷，其中有 24 分的配分是為了鑑別前 1 %的考生，其餘 99 %的考生，拿到試卷的時候即是從 76 分開始往下扣分，因此整份試卷少寫了幾題或錯了幾題，在實際分發時候的影響並不顯著，既然如此，透過一點點的寬心來換取應試的情緒安定，筆者認為是一個可以嘗試的選擇。引用一些公開的資料，筆者提供一些個人的觀察與解讀，再給讀者們參考。如有錯誤也歡迎指正，或是有任何意見也歡迎一起交流。

試題解析

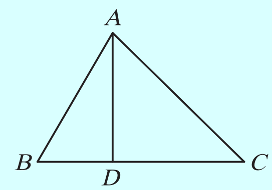
數學甲
師大附中 / 盧裕鵬　老師

第壹部分、選擇（填）題（占 76 分）

一、單選題（占 18 分）

說明：第 1. 題至第 3. 題，每題 6 分。

1. 如右圖所示，有一$\triangle ABC$，已知$\overline{BC}$邊上的高$\overline{AD}=12$，且 $\tan\angle B=\dfrac{3}{2}$、$\tan\angle C=\dfrac{2}{3}$。試問$\overline{BC}$的長度為何？



(1) 20　(2) 21　(3) 24
(4) 25　(5) 26

答　　案：(5)

命題出處：第二冊第四章　三角比

測驗目標：能正確使用正切的定義

難 易 度：易

詳　　解：$\tan B=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$　$\therefore \dfrac{12}{\overline{BD}}=\dfrac{3}{2} \Rightarrow \overline{BD}=8$

$\tan C=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{CD}}$　$\therefore \dfrac{12}{\overline{CD}}=\dfrac{2}{3} \Rightarrow \overline{CD}=18$

$\therefore \overline{BC}=\overline{BD}+\overline{CD}=8+18=26$

故選(5)

2. 坐標平面上，橢圓 Γ 的方程式為 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{6^2}=1$ (其中 a 為正實數)。若將 Γ 以原點 O 為中心，沿 x 軸方向伸縮為 2 倍、沿 y 軸方向伸縮為 3 倍後，所得到的新圖形會通過點 $(18\,,0)$。試問下列哪一個選項是 Γ 的焦點？

(1) $(0\,,3\sqrt{3})$
(2) $(-3\sqrt{5}\,,0)$
(3) $(0\,,6\sqrt{13})$
(4) $(-3\sqrt{13}\,,0)$
(5) $(9\,,0)$

答　　案：(2)

命題出處：選修數學甲(下)第一章　二次曲線

測驗目標：熟悉橢圓定義與了解伸縮變換

難 易 度：易

詳　　解：由題意得新圖形方程式為 $\dfrac{x^2}{2^2\cdot a^2}+\dfrac{y^2}{3^2\cdot 6^2}=1$

且過點 (18 , 0)，代入得

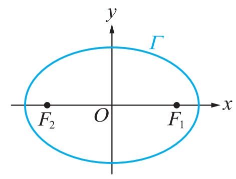
$\dfrac{18^2}{4a^2}+0=1 \Rightarrow 4a^2=18^2 \Rightarrow a=9$ ($\because a$ 為正實數)

即原橢圓 Γ 的方程式為 $\dfrac{x^2}{9^2}+\dfrac{y^2}{6^2}=1$

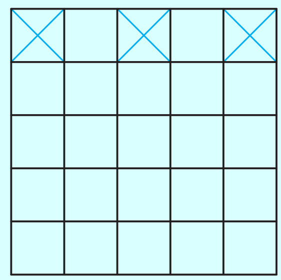
則 $c^2=a^2-b^2=9^2-6^2=45 \Rightarrow c=3\sqrt{5}$

$\therefore$焦點 $F_1(3\sqrt{5}, 0)$，$F_2(-3\sqrt{5}, 0)$

故選(2)



3. 想在 5x5 的棋盤上擺放 4 個相同的西洋棋的城堡棋子。由於城堡會將同一行或是同一列的棋子吃掉，故擺放時規定每一行與每一列最多只能擺放一個城堡。在第一列的第一、三、五格 (如右圖示畫叉的格子) 不擺放的情況下，試問共有多少種擺放方式？



(1) 216
(2) 240
(3) 288
(4) 312
(5) 360

答　　案：(4)

命題出處：第二冊第三章　排列組合與機率

測驗目標：能分類並善用組合公式求解

難 易 度：易

詳　　解：分兩部分討論如下

①棋子有放在第一列：$2\cdot C^4_3\cdot 4\cdot 3\cdot 2=192$

②棋子沒有放在第一列：$C^4_4\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2=120$

由①、②可知，共 $192+120=312$ (種)

故選(4)

【另解】

全部－不合 (棋子放在畫叉處)

$=C^5_4\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2-C^3_1C^4_3\cdot 4\cdot 3\cdot 2$

$=5\cdot 120-3\cdot 4\cdot 4\cdot 3\cdot 2$

$=600-288=312$ (種)

故選(4)

二、多選題（占 40 分）

說明：第 4. 題至第 8. 題，每題 8 分。

4. 一遊戲廠商將舉辦抽獎活動，廠商公告每次抽獎需使用掉一個代幣，且每次抽獎的中獎機率皆為 $\frac{1}{10}$。某甲決定先存若干個代幣，並在活動開始後進行抽獎，直到用完所有代幣才停止。試選出正確的選項。
(1)某甲中獎一次所需要抽獎次數的期望值為 10
(2)某甲抽獎兩次就中獎一次以上的機率為 0.2
(3)某甲抽獎 10 次都沒中獎的機率小於抽獎 1 次就中獎的機率
(4)某甲至少要存 22 個代幣，才能保證中獎的機率大於 0.9
(5)某甲只要存足夠多的代幣，就可以保證中獎的機率為 1

答　　案：(1)(4)
命題出處：第三冊 A 第二章　指數與對數函數、選修數學甲(下)第三章　機率統計
測驗目標：熟記幾何分布的期望值，求機率並利用對數比較
難 易 度：中
詳　　解：(1) ○：第一次抽中的次數 X，$X \sim G\left(\frac{1}{10}\right)$

$\therefore E(X)=\frac{1}{p}=10$

(2) ╳：甲抽兩次中一次以上的機率為

$1-$均沒中$=1-\left(\frac{9}{10}\right)^2=0.19\neq 0.2$

(3) ╳：設甲抽獎 10 次都沒中獎的機率為 $p_1=\left(\frac{9}{10}\right)^{10}$

1 次就中獎的機率為 $p_2=\frac{1}{10}$

比較 p_1 與 p_2 的大小，分別取常用對數得

$\log p_1=\log\left(\frac{9}{10}\right)^{10}=10(2\log 3-1)\approx 10\times(-0.0458)=-0.458$

$\log p_2=\log\frac{1}{10}=-1$

$\therefore p_1>p_2$

(4) ○：甲至少存 22 個代幣，表示甲至少有 22 次中獎機會

$\therefore$甲中獎的機率 $\geq 1-\left(\frac{9}{10}\right)^{22}$

要比較 $1-\left(\frac{9}{10}\right)^{22}$ 與 0.9 的大小，可先比較 $\left(\frac{9}{10}\right)^{22}$ 與 0.1 的大小

承(3)的作法，各取常用對數得

$\log\left(\frac{9}{10}\right)^{22}=22(2\log 3-1)\approx 22\times(-0.0458)=-1.0076$

$\log 0.1=-1$

又$\because \log\left(\frac{9}{10}\right)^{21}\approx 21\times(-0.0458)=-0.9618$

$\therefore \left(\frac{9}{10}\right)^{22}<0.1<\left(\frac{9}{10}\right)^{21}$

$\Rightarrow 1-\left(\frac{9}{10}\right)^{22}>0.9$，但 $1-\left(\frac{9}{10}\right)^{21}<0.9$

故甲至少要存 22 個代幣，才能保證中獎的機率大於 0.9

【另解】

$1-\left(\frac{9}{10}\right)^{n}>0.9\Rightarrow\left(\frac{9}{10}\right)^{n}<0.1\Rightarrow n(\log 9-\log 10)<\log 0.1$

$\Rightarrow -0.0458n<-1\Rightarrow n>\frac{1}{0.0458}\Rightarrow n>21.8\cdots\cdots$

故甲至少要存 22 個代幣，才能保證中獎的機率大於 0.9

(5)╳：假設甲有 n 個代幣

則對所有正整數 n，甲中獎的機率為 $1-\left(\frac{9}{10}\right)^{n}<1$ ($\because n$ 不可能為 ∞)

故選(1)(4)

5. 設 $f(x)$ 為三次實係數多項式。已知 $f(-2-3i)=0$ (其中 $i=\sqrt{-1}$)，且 $f(x)$ 除以 x^2+x-2 的餘式為 18。試選出正確的選項。

(1) $f(2+3i)=0$

(2) $f(-2)=18$

(3) $f(x)$ 的三次項係數為負

(4) $f(x)=0$ 恰有一正實根

(5) $y=f(x)$ 圖形的對稱中心在第一象限

答　　案：(2)(3)(4)

命題出處：第一冊第三章　多項式函數、選修數學甲(下)第二章　複數與多項式方程式

測驗目標：實係數多項式虛根成對，應用餘式求值

難 易 度：中

詳　　解：(1)╳：$f(x)$ 為三次實係數多項式

$\Rightarrow$ 虛根成對且有實根

$\therefore f(-2-3i)=0\Rightarrow f(-2+3i)=0$

(2)○：$f(x)$ 除以 x^2+x-2 的餘式為 18

$\therefore f(x)=(x^2+x-2)(px+q)+18$，其中 p，q 為實數

將 $x=-2$ 代入得

$f(-2)=(4-2-2)(-2p+q)+18=18$

(3) ○：以 $-2-3i$，$-2+3i$ 為根的二次方程式為 $x^2+4x+13=0$

$\therefore$ 令 $f(x)=(x^2+4x+13)(ax+b)=(x^2+x-2)(px+q)+18$

$\because x^2+x-2=(x+2)(x-1)$

$\therefore$ 將 x 分別以 -2，1 代入 $f(x)$

$$\Rightarrow \begin{cases}(4-8+13)(-2a+b)=18\\(1+4+13)(a+b)=18\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-2a+b=2\\a+b=1\end{cases}$$

解得 $a=-\dfrac{1}{3}$，$b=\dfrac{4}{3}$

$$\therefore f(x)=(x^2+4x+13)\left(-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}\right)=-\frac{1}{3}(x^2+4x+13)(x-4)$$

$$=-\frac{1}{3}(x^3-3x-52)$$

(4) ○：承(3)，$f(x)=-\dfrac{1}{3}(x^2+4x+13)(x-4)$

$\therefore f(x)=0$ 的三根為 $-2-3i$，$-2+3i$，4

(5) ╳：承(3)，$f(x)=-\dfrac{1}{3}(x^3-3x-52)$，其對稱中心為 $\left(0,\dfrac{52}{3}\right)$ 在 y 軸上

故選(2)(3)(4)

6. 坐標空間中，考慮滿足內積 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\sqrt{15}$ 與外積 $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=(-1,0,3)$ 的兩向量 $\overrightarrow{u}$、$\overrightarrow{v}$。試選出正確的選項。

(1) $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 的夾角 θ (其中 $0\leq\theta\leq\pi$，π 為圓周率) 大於 $\dfrac{\pi}{4}$

(2) $\overrightarrow{u}$ 可能為 $(1,0,-1)$

(3) $|\overrightarrow{u}|+|\overrightarrow{v}|\geq 2\sqrt{5}$

(4)若已知 $\overrightarrow{v}$，則 $\overrightarrow{u}$ 可以被唯一決定

(5)若已知 $|\overrightarrow{u}|+|\overrightarrow{v}|$，則 $|\overrightarrow{v}|$ 可以被唯一決定

答　　案：(3)(4)

命題出處：第四冊 A 第一章　空間向量

測驗目標：了解內積、外積的意義

難 易 度：中

詳　　解：$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\sqrt{15}$，$\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=(-1,0,3)$

(1) ╳：設 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 的夾角為 θ

$\because \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\sqrt{15}\Rightarrow|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\cos\theta=\sqrt{15}$ ……………………①

$\because \overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=(-1,0,3)\Rightarrow|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\sin\theta=\sqrt{10}$ ……………②

$$\frac{②}{①}\Rightarrow \tan\theta=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}<1 \quad \therefore \theta<\frac{\pi}{4}$$

(2) ╳：∵ $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \Rightarrow \overrightarrow{u} \cdot (-1, 0, 3) = 0$

又 $(1, 0, -1) \cdot (-1, 0, 3) = -1 + 0 - 3 = -4 \neq 0$

∴ $\overrightarrow{u}$ 不可能為 $(1, 0, -1)$

(3) ○：承(1)　∵$\tan\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$，代入①

$\therefore |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}| \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \sqrt{15} \Rightarrow |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}| = 5$

由算幾不等式，得$|\overrightarrow{u}| + |\overrightarrow{v}| \geq 2\sqrt{|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|}$

得$|\overrightarrow{u}| + |\overrightarrow{v}| \geq 2\sqrt{5}$

(4) ○：若已知 $\overrightarrow{v}$，令$|\overrightarrow{v}| = k$，承(3)　∵$|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}| = 5$

$\therefore |\overrightarrow{u}| = \dfrac{5}{k}$，又 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 的夾角 θ 固定，且 $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ 也固定

故當 $\overrightarrow{v}$ 確定後，$\overrightarrow{u}$ 也隨之確定

(5) ╳：取$|\overrightarrow{u}| + |\overrightarrow{v}| = 6 \geq 2\sqrt{5}$　$\therefore |\overrightarrow{u}| = 6 - |\overrightarrow{v}|$

代入$|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}| = 5 \Rightarrow |\overrightarrow{v}|(6 - |\overrightarrow{v}|) = 5$

$\Rightarrow |\overrightarrow{v}|^2 - 6|\overrightarrow{v}| + 5 = 0$

$\Rightarrow |\overrightarrow{v}| = 1$ 或 5，故 $\overrightarrow{v}$ 無法確定

故選(3)(4)

7. 坐標平面上，考慮兩函數 $f(x) = x^5 - 5x^3 + 5x^2 + 5$ 與 $g(x) = \sin\left(\dfrac{\pi x}{3} + \dfrac{\pi}{2}\right)$ 的函數圖形 (其中 π 為圓周率)。試選出正確的選項。

(1) $f'(1) = 0$

(2) $y = f(x)$ 在閉區間 $[0, 2]$為遞增

(3) $y = f(x)$ 在閉區間 $[0, 2]$ 為凹向上

(4)對任意實數 x，$g(x + 6\pi) = g(x)$

(5) $y = f(x)$ 與 $y = g(x)$ 在閉區間 $[3, 4]$ 皆為遞增

答　　案：(1)(2)(5)

命題出處：第三冊 A 第一章　三角函數、選修數學甲(上)第二章　微分

測驗目標：能運用微分判斷圖形的特徵

難 易 度：中

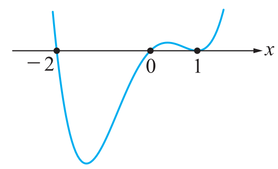
詳　　解：$f(x) = x^5 - 5x^3 + 5x^2 + 5$，

$g(x) = \sin\left(\dfrac{\pi x}{3} + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}x\right)$

(1) ○：$f'(x) = 5x^4 - 15x^2 + 10x$

$\therefore f'(1) = 5 - 15 + 10 = 0$

(2) ○：$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow f(x)$ 遞增



$\therefore 5x^4-15x^2+10x\geq 0 \Leftrightarrow x(x^3-3x+2)\geq 0$

$\Leftrightarrow x(x-1)^2(x+2)\geq 0 \Leftrightarrow x\leq -2$ 或 $x\geq 0$

$\because y=f(x)$ 在 $(-\infty,-2]\cup[0,\infty)$ 遞增

$\therefore y=f(x)$ 在閉區間 $[0,2]$ 為遞增

(3) ╳：應用 $f''(x)$ 來判斷凹口方向

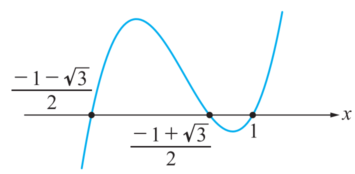
① $x\in[a,b]$，若 $f''(x)>0\Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 凹口向上

② $x\in[a,b]$，若 $f''(x)<0\Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 凹口向下

令 $f''(x)>0\Leftrightarrow 20x^3-30x+10>0$

$\Leftrightarrow 2x^3-3x+1>0$

$\Leftrightarrow (x-1)(2x^2+2x-1)>0$



$\Leftrightarrow \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}<x<\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ 或 $x>1$

$\therefore f(x)$ 在區間 $\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2},\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$，$(1,\infty)$ 凹口向上

故 $y=f(x)$ 不會在閉區間 $[0,2]$ 恆為凹口向上

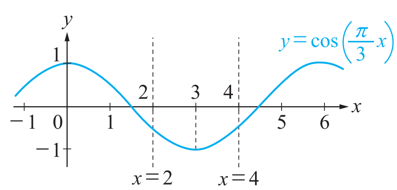
(4) ╳：$\because g(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}x\right)$

$\therefore g(x+6\pi)=\cos\left[\dfrac{\pi}{3}(x+6\pi)\right]=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}x+2\pi^2\right)\neq g(x)$

(5) ○：承(2)　$\because y=f(x)$ 在 $(-\infty,-2]\cup[0,\infty)$ 遞增

$\therefore f(x)$ 在 $[3,4]$ 遞增

$\because 3\leq x\leq 4$



由 $g(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}x\right)$ 的圖形得知

$g(x)$ 在 $[3,4]$ 遞增

故選(1)(2)(5)

8. 設 z 為非零複數，且設 $\alpha=|z|$、β 為 z 的輻角，其中 $0\leq\beta<2\pi$ (其中 π 為圓周率)。對任一正整數 n，設實數 x_n 與 y_n 分別為 z^n 的實部與虛部。試選出正確選項。

(1)若 $\alpha=1$ 且 $\beta=\dfrac{3\pi}{7}$，則 $x_{10}=x_3$

(2)若 $y_3=0$，則 $y_6=0$

(3)若 $x_3=1$，則 $x_6=1$

(4)若數列 $\langle y_n\rangle$ 收斂，則 $\alpha\leq 1$

(5)若數列 $\langle x_n\rangle$ 收斂，則數列 $\langle y_n\rangle$ 也收斂

答　　案：(2)(5)

命題出處：選修數學甲(上)第一章　極限與函數、選修數學甲(下)第二章　複數與多項式方程式

測驗目標：極式的運用與極限判斷

難 易 度：中

詳　　解：$z=\alpha(\cos\beta+i\sin\beta)$，$z^n=\alpha^n(\cos n\beta+i\sin n\beta)$

$\therefore x_n=\alpha^n\cos n\beta$，$y_n=\alpha^n\sin n\beta$

(1) ╳：若 $\alpha=1$ 且 $\beta=\dfrac{3\pi}{7}$

則 $x_{10}=\cos\dfrac{30\pi}{7}=\cos\left(4\pi+\dfrac{2\pi}{7}\right)=\cos\dfrac{2\pi}{7}$

$x_3=\cos\dfrac{9\pi}{7}=\cos\left(\pi+\dfrac{2\pi}{7}\right)=-\cos\dfrac{2\pi}{7}$

故 $x_{10}\neq x_3$

(2) ○：$\because y_3=0\Rightarrow\alpha^3\sin(3\beta)=0\Rightarrow\sin 3\beta=0$

則 $y_6=\alpha^6\sin(6\beta)=\alpha^6(2\sin 3\beta\cos 3\beta)=0$

(3) ╳：$\because x_3=\alpha^3\cos 3\beta=1\quad\therefore\cos 3\beta=\dfrac{1}{\alpha^3}$

則 $x_6=\alpha^6\cos 6\beta=\alpha^6(2\cos^2 3\beta-1)$

$$=\alpha^6\left[2\cdot\left(\frac{1}{\alpha^3}\right)^2-1\right]=2-\alpha^6\neq 1\quad(\text{當 }\alpha\neq 1)$$

(4) ╳：$\because y_n=\alpha^n\sin n\beta$，取 $\beta=\pi\Rightarrow\sin\beta=0$

$\therefore y_n=0$ 對任意 $\alpha>0$

(5) ○：$x_n=\alpha^n\cos n\beta$，$0\leq\beta<2\pi$

① $\beta=0$ 時，$\cos n\beta=1$，對所有 $n\in\mathbb{N}$

$\therefore x_n=\alpha^n$ 收斂 $\Leftrightarrow 0<\alpha\leq 1$

② $\beta\neq 0$ 時，考慮以下情況

❶ $\beta=\pi$ 時，$\langle\cos n\beta\rangle$：$-1$，$1$，$-1$，$1$，……

$\therefore x_n=\alpha^n\cos n\beta$ 收斂 $\Leftrightarrow 0<\alpha<1$

❷ $\beta=\dfrac{\pi}{2}$ 時，$\langle\cos n\beta\rangle$：$0$，$-1$，$0$，$1$，$0$，$-1$，$0$，$1$，……

$\therefore x_n=\alpha^n\cos n\beta$ 收斂 $\Leftrightarrow 0<\alpha<1$

由❶、❷可知，$\beta\neq 0$ 時，$\cos n\beta$ 不會趨於定值

$\therefore x_n=\alpha^n\cos n\beta$ 收斂之充要條件為 $0<\alpha<1$

綜合①、②可知，

x_n 收斂的條件為 $0<\alpha<1$ 或 $\alpha=1$ 且 $\beta=0$，此時 $z=1$

ⓐ若 $0<\alpha<1$ 時，$y_n=\alpha^n\sin n\beta\quad\therefore -\alpha^n\leq y_n\leq\alpha^n$

$\because\lim\limits_{n\to\infty}(-\alpha^n)=\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^n=0$

由夾擠定理，得 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0\quad\therefore\langle y_n\rangle$ 收斂

ⓑ若 $\alpha=1$ 且 $\beta=0$ 時，$y_n=0$，對所有 $n\in\mathbb{N}\quad\therefore\langle y_n\rangle$ 收斂

綜合ⓐ、ⓑ可知，若 $\langle x_n\rangle$ 收斂，則 $\langle y_n\rangle$ 收斂

故選(2)(5)

三、選填題（占 18 分）

說明：第 9. 題至第 11. 題，每題 6 分。

9. 設 a，b，c，d 為實數。已知兩聯立方程組 $\begin{cases} ax+by=2 \\ cx+dy=1 \end{cases}$、$\begin{cases} ax+by=-1 \\ cx+dy=-1 \end{cases}$ 的增廣矩陣經過相同的列運算後，分別得到 $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$、$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$，則聯立方程組 $\begin{cases} ax+by=0 \\ cx+dy=1 \end{cases}$ 的解為 $x=$ ＿9-1 9-2＿，$y=$ ＿9-3＿。

答　　案：-7；0

命題出處：第四冊 A 第四章　矩陣

測驗目標：了解矩陣列運算的意義，並能回推應用解題

難 易 度：中

詳　　解：(1)由 $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$ 得 $\begin{cases} ax+by=2 \\ cx+dy=1 \end{cases}$ 之解為 $(5, 2)$

代回方程組，得 $\begin{cases} 5a+2b=2 \\ 5c+2d=1 \end{cases}$

(2)由 $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$ 得 $\begin{cases} ax+by=-1 \\ cx+dy=-1 \end{cases}$ 之解為 $(1, -1)$

代回方程組，得 $\begin{cases} a-b=-1 \\ c-d=-1 \end{cases}$

(3)整理成 $\begin{cases} 5a+2b=2 \\ a-b=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$

$\begin{cases} 5c+2d=1 \\ c-d=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=-\frac{1}{7} \\ d=\frac{6}{7} \end{cases}$

(4)$\therefore \begin{cases} ax+by=0 \\ cx+dy=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ -\frac{1}{7}x+\frac{6}{7}y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-7 \\ y=0 \end{cases}$

10. 坐標平面上，設 Γ 為以原點為圓心的圓，P 為 Γ 與 x 軸的其中一個交點。已知通過 P 點且斜率為 $\frac{1}{2}$ 的直線交 Γ 於另一點 Q，且 $\overline{PQ}=1$，則 Γ 的半徑為 $\dfrac{\sqrt{\text{10-1}}}{\text{10-2}}$。(化為最簡根式)

答　　案：$\frac{\sqrt{5}}{4}$

命題出處：第一冊第四章　直線與圓、第二冊第四章　三角比

測驗目標：藉由圓的性質與斜角的應用解題

難 易 度：易

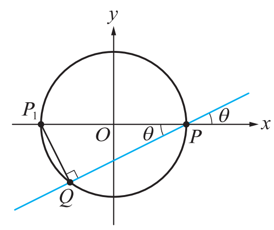
詳　　解：如右圖，令圓與 x 軸另一交點為 P_1

連接 $\overline{P_1Q} \Rightarrow \angle P_1QP = 90^\circ$，設斜角為 θ，圓半徑為 r

$\therefore \tan\theta = \frac{1}{2} = \frac{\overline{P_1Q}}{\overline{PQ}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\overline{P_1Q}}{1}$

$\therefore \overline{P_1Q} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2r = \overline{P_1P} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

故 Γ 的半徑為 $r = \frac{\sqrt{5}}{4}$



11. 設實數 a_1，a_2，……，a_9 是公差為 2 的等差數列，其中 $a_1 \neq 0$ 且 $a_3 > 0$。若 $\log_2 a_3$，$\log_2 b$，$\log_2 a_9$ 三數依序也成等差數列，其中 b 為 a_4，a_5，a_6，a_7，a_8 其中一數，則

$a_9 = \dfrac{(11\text{-}1)(11\text{-}2)}{(11\text{-}3)}$。(化為最簡分數)

答　　案：$\frac{25}{2}$

命題出處：第二冊第一章　數列與級數、第三冊 A 第二章　指數與對數函數

測驗目標：結合等差數列與對數的運算

難 易 度：中

詳　　解：$\because a_1$，a_2，a_3，……，a_9 成等差，且公差為 2

令 $a_1 = a$　$\therefore a_3 = a+4$，$a_9 = a+16$

又 $\log_2 a_3$，$\log_2 b$，$\log_2 a_9$ 成等差

$\therefore 2\log_2 b = \log_2 a_3 + \log_2 a_9 \Rightarrow b^2 = a_3 \cdot a_9 = (a+4)(a+16)$

$\therefore b^2 = a^2 + 20a + 64$

又 $\because b \in \{a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$ 且 $a_3 > 0$，令 $b = a+2k$，$k=3$，4，5，6，7

$\therefore a^2 + 4ak + 4k^2 = a^2 + 20a + 64 \Rightarrow a = \frac{16-k^2}{k-5}$

則 $a_3 = a+4 = \frac{16-k^2}{k-5} + 4 = \frac{k^2-4k+4}{5-k}$　$\therefore a_3 = \frac{(k-2)^2}{5-k} > 0 \Rightarrow k < 5$

$\therefore k = 3$ 或 4

①當 $k=3$ 時，$a = \frac{16-9}{3-5} = -\frac{7}{2}$，得 $a_9 = -\frac{7}{2} + 16 = \frac{25}{2}$

②當 $k=4$ 時，$a = \frac{16-16}{4-5} = 0$ (不合)

故 $a_9 = \frac{25}{2}$

第貳部分、混合題或非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有 2 題組，選擇題每題 2 分，非選擇題配分標於題末。限在標示題號的作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶 (液)。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

12－14 題為題組

坐標空間中，考慮三個平面 E_1：$x+y+z=7$、E_2：$x-y+z=3$、E_3：$x-y-z=-5$。令 E_1 與 E_2 相交的直線為 L_3；E_2 與 E_3 相交的直線為 L_1；E_3 與 E_1 相交的直線為 L_2。

根據上述，試回答下列問題。

12. 已知三直線 L_1、L_2、L_3 有共同交點，試求此共同交點 P 的坐標。(非選擇題，4 分)

答　　案：(1 , 2 , 4)

命題出處：第四冊 A 第二章　空間中的平面與直線、第四冊 A 第四章　矩陣

測驗目標：能解聯立方程式，求出直線方程式

難 易 度：易

詳　　解：L_1：$\begin{cases} x-y+z=3 \cdots\cdots ① \\ x-y-z=-5 \cdots\cdots ② \end{cases}$

①－② ⇒ $z=4$，代回①、②　$\therefore \begin{cases} x-y=-1 \\ x-y=-1 \end{cases}$

令 $x=t_1$，得 L_1：$\begin{cases} x=t_1 \\ y=1+t_1 \\ z=4 \end{cases}$，$t_1 \in \mathbb{R}$，且 L_1 的方向向量 $\overrightarrow{\ell_1}=(1,1,0)$

同理 L_2：$\begin{cases} x+y+z=7 \cdots\cdots ③ \\ x-y-z=-5 \cdots\cdots ④ \end{cases}$

③＋④ ⇒ $x=1$，代回③、④　$\therefore \begin{cases} y+z=6 \\ y+z=6 \end{cases}$

令 $y=t_2$，得 L_2：$\begin{cases} x=1 \\ y=t_2 \\ z=6-t_2 \end{cases}$，$t_2 \in \mathbb{R}$，且 L_2 的方向向量 $\overrightarrow{\ell_2}=(0,1,-1)$

同理 L_3：$\begin{cases} x+y+z=7 \cdots\cdots ⑤ \\ x-y+z=3 \cdots\cdots ⑥ \end{cases}$

⑤－⑥ ⇒ $y=2$，代回⑤、⑥　$\therefore \begin{cases} x+z=5 \\ x+z=5 \end{cases}$

令 $x=t_3$，得 L_3：$\begin{cases} x=t_3 \\ y=2 \\ z=5-t_3 \end{cases}$，$t_3 \in \mathbb{R}$，且 L_3 的方向向量 $\overrightarrow{\ell_3}=(1,0,-1)$

故得三直線 L_1，L_2，L_3 之交點 P 的坐標為 (1 , 2 , 4)

【另解】

三直線 L_1，L_2，L_3 之交點即三平面 E_1，E_2，E_3 之交點

解三元一次聯立方程式 $\begin{cases} x+y+z=7 \cdots\cdots ① \\ x-y+z=3 \cdots\cdots ② \\ x-y-z=-5 \cdots\cdots ③ \end{cases}$

由①＋③，得 $2x=2 \Rightarrow x=1$

代回，得 $\begin{cases} y+z=6 \cdots\cdots ④ \\ -y+z=2 \cdots\cdots ⑤ \end{cases}$

由④＋⑤，得 $2z=8 \Rightarrow z=4$

代回，得 $y=2$

故交點 P 的坐標為 $(1, 2, 4)$

13. 試說明 L_1、L_2、L_3 中，任兩直線所夾的銳角皆為 60°。(非選擇題，4 分)
(註：令 L_1 與 L_2 所夾的銳角為 α，L_2 與 L_3 所夾的銳角為 β，L_3 與 L_1 所夾的銳角為 γ)

答　　案：略

命題出處：第四冊 A 第一章　空間向量、第四冊 A 第二章　空間中的平面與直線

測驗目標：能求出直線的方向向量，並利用內積求夾角

難 易 度：中偏易

詳　　解：承 12.，L_1 的方向向量 $\overrightarrow{\ell_1}=(1, 1, 0)$，

L_2 的方向向量 $\overrightarrow{\ell_2}=(0, 1, -1)$，

L_3 的方向向量 $\overrightarrow{\ell_3}=(1, 0, -1)$

① $\cos\alpha=\dfrac{|\overrightarrow{\ell_1}\cdot\overrightarrow{\ell_2}|}{|\overrightarrow{\ell_1}||\overrightarrow{\ell_2}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \alpha=60^\circ$

② $\cos\beta=\dfrac{|\overrightarrow{\ell_2}\cdot\overrightarrow{\ell_3}|}{|\overrightarrow{\ell_2}||\overrightarrow{\ell_3}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \beta=60^\circ$

③ $\cos\gamma=\dfrac{|\overrightarrow{\ell_3}\cdot\overrightarrow{\ell_1}|}{|\overrightarrow{\ell_3}||\overrightarrow{\ell_1}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \gamma=60^\circ$

綜合①、②、③，得 L_1，L_2，L_3 任兩直線所夾的銳角皆為 60°

【另解】

三平面 E_1：$x+y+z=7$，法向量 $\overrightarrow{n_1}=(1, 1, 1)$

E_2：$x-y+z=3$，法向量 $\overrightarrow{n_2}=(1, -1, 1)$

E_3：$x-y-z=-5$，法向量 $\overrightarrow{n_3}=(1, -1, -1)$

令直線 L_1：$\begin{cases}x-y+z=3\\x-y-z=-5\end{cases}$ 之方向向量為 $\overrightarrow{\ell_1}$

$$\because \overrightarrow{\ell_1} // \overrightarrow{n_2}\times\overrightarrow{n_3} \text{ 且 } \overrightarrow{n_2}\times\overrightarrow{n_3}=\left(\begin{vmatrix}-1&1\\-1&-1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&-1\\1&-1\end{vmatrix}\right)=(2,2,0)$$

$\therefore$取 $\overrightarrow{\ell_1}=(1,1,0)$

令直線 L_2：$\begin{cases}x+y+z=7\\x-y-z=-5\end{cases}$ 之方向向量為 $\overrightarrow{\ell_2}$

$$\because \overrightarrow{\ell_2} // \overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_3} \text{ 且 } \overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_3}=\left(\begin{vmatrix}1&1\\-1&-1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}\right)=(0,2,-2)$$

$\therefore$取 $\overrightarrow{\ell_2}=(0,1,-1)$

令直線 L_3：$\begin{cases}x+y+z=7\\x-y+z=3\end{cases}$ 之方向向量為 $\overrightarrow{\ell_3}$

$$\because \overrightarrow{\ell_3} // \overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2} \text{ 且 } \overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\left(\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}\right)=(2,0,-2)$$

$\therefore$取 $\overrightarrow{\ell_3}=(1,0,-1)$

則 $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$

故得 $\alpha=\beta=\gamma=60^\circ$

14. 若坐標空間中第四個平面 E_4 與 E_1、E_2、E_3 圍出一個邊長為 $6\sqrt{2}$ 的正四面體，試求出 E_4 的方程式(寫成 $x+ay+bz=c$ 的形式)。(非選擇題，4 分)

答　　案：$x+y-z=11$ 或 $x+y-z=-13$

命題出處：第四冊 A 第二章　空間中的平面與直線

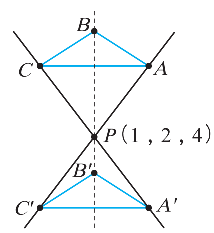
測驗目標：能判斷出法向量，求出正四面體的高

難 易 度：中偏難

詳　　解：設正四面體的高為 h，邊長為 ℓ

$$\therefore h=\sqrt{\ell^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ell\cdot\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\left(1-\frac{1}{3}\right)\ell^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}\ell$$

$$\because \ell=6\sqrt{2}\Rightarrow h=\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot 6\sqrt{2}=4\sqrt{3}$$



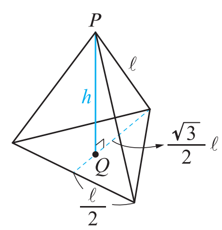
由題意知，

E_4 之法向量 $\overrightarrow{n_4} // \overrightarrow{\ell_1}+\overrightarrow{\ell_2}+\overrightarrow{\ell_3}=(2,2,-2)$

$\therefore$取 $\overrightarrow{n_4}=(1,1,-1)$，令 P 在 E_4 之投影點為 Q

$\therefore \overrightarrow{PQ}//\overrightarrow{n_4}$，令 $\overrightarrow{PQ}=k\overrightarrow{n_4}$　$\therefore|\overrightarrow{PQ}|=|k\overrightarrow{n_4}|$

$\therefore 4\sqrt{3}=|\sqrt{3}k|\Rightarrow k=\pm 4$



令 O 為原點

① $k=4 \Rightarrow \overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OP}+4\overrightarrow{n_4}=(1,2,4)+4(1,1,-1)=(5,6,0)$

得平面 E_4 方程式為 $x+y-z=11$

② $k=-4 \Rightarrow \overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OP}-4\overrightarrow{n_4}$

$=(1,2,4)-4(1,1,-1)=(-3,-2,8)$

得平面 E_4 方程式為 $x+y-z=-13$

綜合①、②，得平面 E_4 方程式為 $x+y-z=11$ 或 $x+y-z=-13$

【另解】

因正四面體的邊長為 $6\sqrt{2}$

令此正四面體的高為 h，則 $h=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\cdot 6\sqrt{2}=4\sqrt{3}$

由題意知平面 E_4 之法向量 $\overrightarrow{n_4} \,/\!/\, \overrightarrow{\ell_1}+\overrightarrow{\ell_2}+\overrightarrow{\ell_3}$

$\because \overrightarrow{\ell_1}+\overrightarrow{\ell_2}+\overrightarrow{\ell_3}=(2,2,-2)$　$\therefore$取 $\overrightarrow{n_4}=(1,1,-1)$

設平面 E_4 方程式為 $x+y-z+k=0$

$\because P$ 到 E_4 之距離為 $h=4\sqrt{3}$

$\therefore \dfrac{|1+2-4+k|}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3} \Rightarrow |k-1|=12$，得 $k=13$ 或 -11

故平面 E_4 方程式為 $x+y-z=11$ 或 $x+y-z=-13$

15－17 題為題組

坐標平面上，設 Γ 為三次函數 $f(x)=x^3-9x^2+15x-4$ 的函數圖形。根據上述，試回答下列問題。

15. 試問下列何者為 $f(x)$ 的導函數？(單選題，2 分)

(1) $x^2-9x+15$

(2) $3x^3-18x^2+15x-4$

(3) $3x^3-18x^2+15x$

(4) $3x^2-18x+15$

(5) $x^2-18x+15$

答　　案：(4)

命題出處：選修數學甲(上)第二章　微分

測驗目標：能求出多項式的導函數

難 易 度：易

詳　　解：$\because f(x)=x^3-9x^2+15x-4$

$\therefore f'(x)=3x^2-18x+15$

故選(4)

16. 試說明 $P(1\,,3)$ 為 Γ 上之一點，並求 Γ 在 P 點的切線 L 的方程式。(非選擇題，4 分)

答　　案：說明略，$y=3$

命題出處：選修數學甲(上)第二章　微分

測驗目標：能利用一階導函數求切線斜率

難 易 度：易

詳　　解：$\because P(1\,,3)\in\Gamma$

承 15.，$f'(x)=3x^2-18x+15$　$\therefore$ 過 P 點的切線斜率 $m=f'(1)$

$\because f'(1)=3-18+15=0\Rightarrow m=0$

故得過 P 點的切線 L 方程式為 $y=3$

17. 承 16，試求 Γ 和 L 所圍成有界區域的面積。(非選擇題，6 分)

答　　案：108

命題出處：選修數學甲(上)第三章　積分

測驗目標：能求出封閉圖形上下限，並利用積分求出面積

難 易 度：中

詳　　解：(1) $\because f(x)=x^3-9x^2+15x-4$

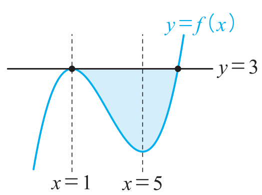
$\therefore$ 令 $f'(x)=3x^2-18x+15=0\Rightarrow x^2-6x+5=0\Rightarrow(x-1)(x-5)=0\Rightarrow x=1$ 或 5

x		1		5	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		3		-29	
增減	↗		↘		↗

且 $f(1)=1-9+15-4=3$

$f(5)=125-225+75-4=-29$

作圖如右



(2) $\begin{cases} y=3 \\ y=x^3-9x^2+15x-4 \end{cases}$

$\Rightarrow x^3-9x^2+15x-7=0\Rightarrow(x-1)^2(x-7)=0\Rightarrow x=1$ 或 7

(3) 所圍成的面積為

$$\int_1^7[3-(x^3-9x^2+15x-4)]\,dx=\int_1^7(-x^3+9x^2-15x+7)\,dx$$

$$=\left(-\frac{x^4}{4}+3x^3-\frac{15}{2}x^2+7x\right)\Big|_1^7$$

$$=-\frac{2401}{4}+1029-\frac{735}{2}+49+\frac{1}{4}-3+\frac{15}{2}-7$$

$$=-600+1029-360+49-10=108$$

故得 Γ 和 L 所圍成有界區域面積為 108

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{n(2a+(n-1)d)}{2}$

   首項為 a，公比為 $r\ (r\neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 級數和：$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ；$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

3. 三角函數的和角公式：$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

   $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

   $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

4. $\triangle ABC$ 的正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ (R 為$\triangle ABC$ 外接圓半徑)

   $\triangle ABC$ 的餘弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

5. 一維數據 X：x_1，x_2，……，x_n，

   算術平均數 $\mu_X=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$ ；標準差 $\sigma_X=\sqrt{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2-n\mu_X^2\right)}$

6. 二維數據 (X,Y)：(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，……，(x_n,y_n)，

   相關係數 $r_{X,Y}=\dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

   最適直線(迴歸直線)方程式 $y-\mu_Y=r_{X,Y}\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$

7. 參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414$，$\sqrt{3}\approx 1.732$，$\sqrt{5}\approx 2.236$，$\sqrt{6}\approx 2.449$，$\pi\approx 3.142$

8. 對數值：$\log 2\approx 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$，$\log 5\approx 0.6990$，$\log 7\approx 0.8451$

9. 若 $X\sim B(n,p)$ 為二項分布，則期望值 $E(X)=np$，變異數 $\mathrm{Var}(X)=np(1-p)$；

   若 $X\sim G(p)$ 為幾何分布，則期望值 $E(X)=\dfrac{1}{p}$，變異數 $\mathrm{Var}(X)=\dfrac{1-p}{p^2}$。