翰林 112 分科測驗

精彩解析 數學甲考科

武陵高中／徐聖翔 老師

總編輯／李心筠
企　編／高湘婷
責　編／吳崇欽．黃美甄
美　編／李湘悌．歐詩妤．林素儀
出　版／民國一一二年八月
發行所／70248臺南市新樂路 76 號
翰林官網 https://www.hle.com.tw
本書內容同步刊載於翰林官網

依據大考中心公布內容【試題．答案】

翰林出版

翰林 112分科測驗

試題分析

數學甲

武陵高中 / 徐聖翔　老師

一、前　言

112 年的分科測驗於 7 月 12 日（三）至 7 月 13 日（四）舉行，是自 108 課綱上路後，由指考轉型為分科測驗後的第二屆升大學考試。今年共計有 4 萬 2 千餘人報名分科測驗，對比於 111 年的 2 萬 9 千餘人，考生人數增加幅度約為 45 %，可見得今年考試分發的狀況將更為激烈。

其中 112 年數學甲的應考人數為 2 萬 5251 人，而 111 年數學甲的應考人數則是 1 萬 7214 人，增幅更高達 46 %。今年試卷的整體難易度看起來跟去年相仿，除了非選題有一道斜橢圓的題目，是因應 108 課綱新增之條目而首次出現於大考之中，對於學生可能較為生疏以外，其餘考題所評量的概念，多是平時複習時常會提醒的重要觀念，並沒有特別刁難學生的困難題。但因為今年考生人數的增多，對於五標的狀況，也連帶增加了一些變數。以下筆者將從本次測驗的試題組成分布開始談起，再分述試題的特色與個人的看法，供讀者們參考。

二、試題分析

(一) 試卷架構與配分

針對本次試卷所對應之單元，以及 111 年分科測驗數學甲之各冊占分，整理如下表。

冊　別	單元名稱	題　型	難易度	分　數	112 年 分科測驗 各冊占分	111 年 分科測驗 各冊占分
第一冊	第一章 數與式	多選 4	中偏易	8 分	8 分	16 分
	第二章 指數、對數	(單選 2)	易			
	第三章 多項式函數	(非選 13)	中			
	第四章 直線與圓	(非選 12)	中偏易			
		(非選 13)	中			

冊　別	單元名稱	題　型	難易度	分　數	112 年分科測驗各冊占分	111 年分科測驗各冊占分
第二冊	第一章 數列與級數				12 分	8 分
	第二章 數據分析					
	第三章 排列組合與機率	選填 11	中	6 分		
	第四章 三角比	選填 9	中	6 分		
第三冊 A	第一章 三角函數	(選填 9)	中		14 分	8 分
	第二章 指數與對數函數	單選 2	易	6 分		
	第三章 平面向量	單選 1	易	6 分		
		非選 12	中偏易	2 分		
第四冊 A	第一章 空間向量	多選 6	中偏難	8 分	20 分	24 分
	第二章 空間中的平面與直線	選填 10	中偏易	6 分		
	第三章 機率					
	第四章 矩陣	非選 17	中	6 分		
選修數學甲(上)	第一章 極限與函數				24 分	24 分
	第二章 微分	多選 5	中	8 分		
		非選 13	中	4 分		
	第三章 積分	單選 3	中	6 分		
		非選 14	中	6 分		

試題分析

<table>
<tr><th>冊　別</th><th>單元名稱</th><th>題　型</th><th>難易度</th><th>分　數</th><th>112 年
分科測驗
各冊占分</th><th>111 年
分科測驗
各冊占分</th></tr>
<tr><td rowspan="6">選修
數學
甲(下)</td><td rowspan="3">第一章
二次曲線</td><td>非選 15</td><td>易</td><td>2 分</td><td rowspan="6">22 分</td><td rowspan="6">20 分</td></tr>
<tr><td>非選 16</td><td>中</td><td>4 分</td></tr>
<tr><td>(非選 17)</td><td>中</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">第二章
複數與多項式方程式</td><td>(多選 5)</td><td>中</td><td></td></tr>
<tr><td>多選 8</td><td>中偏難</td><td>8 分</td></tr>
<tr><td>第三章
機率統計</td><td>多選 7</td><td>中偏難</td><td>8 分</td></tr>
</table>

（若題目有跨多個章節者，屬次要概念之單元，則以括號表示之，且不納入分數計算）

從試卷架構來看，此次分科測驗維持往年的設計，有 3 題單選題（18 分）、5 題多選題（40 分）、3 題選填題（18 分）及 6 題（2 大題）的混合題或非選擇題（24 分）。在各冊的配分上，今年的試卷與去年相同，皆是偏重在第四冊 A、選修數學甲（上）及選修數學甲（下）的部分，合計占了 66 分。較特別的是，已經許多年沒有針對「數與式」的單元直接命題，今年罕見地配了 8 分在多選題且難度不高，算是給考生一點安心的效果。

單以各考題本身來看，筆者認為今年題目並沒有難易度歸類為難的題目，每道題目的解題線索都很明確，較複雜的多選題及非選題，也都有做到循序漸進、由淺入深的設計，故相信考生在看到題目的當下，都能有一些想法可以動手解題，應該較少會發生望著題目卻束手無策的狀況。然而，儘管沒有難易度為難的題目，難易度屬於易的題目卻也僅有 3 題（占 14 分），這表示考生還另有 14 題需要細心的思考與作答，再加上整份試卷的計算量不小，非選題部分也需要縝密地將解題邏輯書寫完整，80 分鐘的考試時間實在太緊湊了。因此本份試卷對實際在考場應試的考生而言，難度仍是相當地高，要取得高分亦不容易。

（二）試題特色

1. 評量的核心皆重視基本觀念：

近年來的大考在命題的設計上，其實都緊扣著基本觀念在做評量，縱使描述方式不常見或題目看似複雜，但仍是緊扣著這樣的原則即可解題。如多選 8 結合了複數、共軛複數、極式以及解複數根，雖然解題觀念較多，但是經過引導，每一個選項其實都只是單一且常見的基本操作；選填 10 只要知道可利用向量找出線段投影所需的夾角，也能輕鬆解題；選填 11 的排列組合問題也是很單純地將問題依照條件分類討論，就會分別變成簡單的小問題，完全不用什麼巧妙的技巧才能處理。所以不需要追求過度包裝的人工難題，只要能夠將基本觀念掌握清楚，都能夠順利地做完試題。

2. 選修數學甲的內容比例偏多：

在高中六冊的數學，今年試題在選修數學甲的部分就占了 46 分，回顧 111 年的分科測驗，選修數學甲的部分也占有 44 分。由此可知，選修數學甲一直是分科測驗的命題重點。單選 3，多選 5、7、8，非選 13～17，皆是選修數學甲的相關題目。

其中多選 5，非選 13、14 算是常見的題目；多選 8 如前所述；非選 15～17 完整地將二次曲線與線性變換結合命題，是一個可預期遲早會出現的題目，就在今年出現了，且概念也僅只是測驗旋轉變換、橢圓定義的基本概念，只是計算量是偏大的；單選 3 再次將 108 課綱重視的條目「黎曼和與定積分的連結」拿來命題，考生只要熟知定積分背後的原理，並能夠從選項中注意到積分範圍是 0 到 3，本題就能夠正確回答。只是筆者認為此題有點不佳的部分是不知道為什麼命題者要挖一個陷阱，刻意少加一項，雖然不影響計算結果，且因為是單選題，在沒有其他選項可選之下，一般考生多半還是能夠選出正確答案，但對於思考比較嚴謹的考生，反而會因為這個小陷阱被耽誤了一些思考時間，變相受到懲罰，實在不是恰當的設計；多選 7 將機率問題結合時鐘刻度，考生只要能細心地分析題目，再配合各選項的提問引導，就能夠順利回答，只是最後一個選項的計算量實在不小。

針對計算量大的狀況，筆者認為在新課綱推廣計算機的理念下，這類繁瑣的人工運算應該能少則少，如實在不能避開，建議就應該同意考生使用計算機，減少在計算本身花費的時間，才是更為適切的做法。

3. 題目多為程序性，由易到難的設計：

今年的試題中，除多選 4 要回答五個概念相近卻彼此獨立的選項外，多選 5～8 及非選題的題組皆是由易到難，一步步引導考生作答的程序性設計，且每一個選項、小題所需要處理的難度都不算高，因此考生只要依循題意逐步地解題，便能夠確實地取得分數。這同時也提醒著考生，倘若在多選題、題組卡住了，相關的線索就在前面的問題中，冷靜面對就能渡過難關。

4. 重視與幾何意涵的連結：

在單選 1、3，多選 6、8，選填 9、10 及兩大題非選題，如能適當連結問題背後的幾何意涵，皆有助於掌握題目的核心概念。尤其多選 6 乍看之下很複雜，但若對空間向量、外積、行列式背後的幾何意義有清楚的概念，這是一題不需要計算，即可以直接判斷的觀念題；選填 10 亦是只要畫出平面與直線的相對關係，就能找到所求。因此考生們在數學的學習上，除了熟練代數的演算以外，多多連結其背後的幾何意涵，也是很重要的訓練。

5. 命題呼應新課綱的變革：

針對 108 課綱強調或新增的條目，近兩年的考題都會配合命題，如新課綱強調的「黎曼和：黎曼和與定積分的連結」，在 112 年的單選 3、111 年的非選 14 皆有出現；「認識含 xy 項的二元二次方程式」，則在 112 年的題組 15～17、111 年的多選 5 有出現；「幾何分布」今年雖沒有命題，但 111 年選填 9 是有設計的。因此，未來考生在準備數甲考試時，針對 108 課綱與 99 課綱差異的部分可以特別留意與複習，諸如：「自然常數 e」、「牛頓求根法」、「連續函數值的平均」等，都是以往課綱沒有且尚未出現於大考中，可以注意的條目。

三、結　論

分科測驗作為升大學的最後一個管道，且是以測驗考生是否具有進階學科知識為主的測驗，整體難度通常會比學測更高一些，並且取材的範圍也偏重在高中的後三冊，占了近七成的分數，表示未來欲參加分科測驗的考生，必定需要好好將高二下學期及高三的課程學好。有些學生常會為了專心準備學測而放棄高三課程的學習，這樣的方式如果要面對分科測驗，將會出現相當大的挑戰，不可不慎。

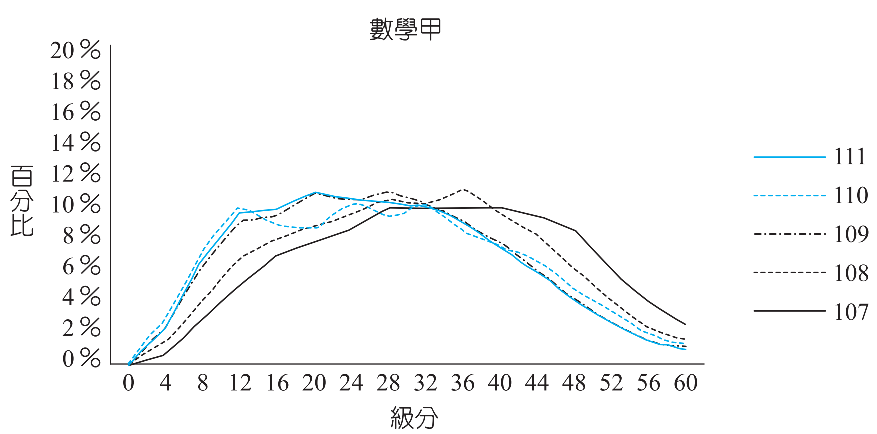
今年分科測驗數學甲的試題，除了計算量偏大以外，就以各個題目本身來看，都是設計良好的試題，沒有過度的人工包裝，且都緊扣著基本觀念進行評量，對於學生的學習態度是有正向影響。但相對地，這卻也是大考中心近年來命題的一個大問題，即是組卷狀況不佳。每一道題目都是精心設計、值得欣賞的好題目，但如果一份試卷的每一題都是這樣，考生處理每一題都相當燒腦，在考試時間只有短短 80 分鐘的情況下，考生在考場的壓力就隨之提升，試卷寫不完將是很正常的現象，那以整份試卷來評價，便不是一份合適的試卷。

引用大考中心網站公告之「111 學年度分科測驗成績相關統計資料說明會」資料中「歷年五標與級分人數百分比分布圖」如下所示，看得出來大考中心近年來的試卷在分數的鑑別狀況是呈現穩定的，每個級分背後的人數比例不會有過大的落差。因此我們可以合理推估，112 年五標跟 111 年五標應該不會有顯著差異。

表 1　**歷年五標與級分人數百分比分布圖：數學甲**

學年度	頂標	前標	均標	後標	底標	頂標－底標	前標－後標
111	43	35	25	15	10	33	20
110	44	37	26	15	9	35	22
109	43	35	25	16	10	33	19
108	45	39	29	19	12	33	20
107	49	42	32	21	15	34	21
5 年平均	44.8	37.6	27.4	17.2	11.2	33.6	20.4
111－（5 年平均）	－1.8	－2.6	－2.4	－2.2	－1.2	－0.6	－0.4

（本表取自大考中心「111 學年度分科測驗成績相關統計資料說明會」資料）



（本圖取自大考中心「111 學年度分科測驗成績相關統計資料說明會」資料）

因此若以原始成績來看（如表 2），筆者保守推估在通常情形下，分科測驗數學甲的原始成績凡達 70 分即可為頂標、達 60 分為前標、達 45 分為均標。換句話說，未來考生在面對分科測驗的考試時，可以考慮以 70 分做為頂標的基準來評估如何答題。因為在假設大考中心的組卷狀況無改善的狀況下（近五年的分布都差不多，相信大考中心應十分肯定目前的作法），在 80 分鐘內寫完整份試卷要承擔的壓力實在不合情理，也平添不少計算失誤的風險，不如心中先訂個基準成績，在考試時便可適當做取捨，讓自己有充分的時間可以處理較為拿手的問題，筆者認為是一個可行的應試策略。

表 2　**歷年數學甲五標及其對應原始得分**

學年度	頂標	前標	均標	後標	底標
111	$60.35 < X \leq 61.79$	$48.86 < X \leq 50.30$	$34.49 < X \leq 35.93$	$20.12 < X \leq 21.56$	$12.93 < X \leq 14.37$
110	67	55	38	22	12
109	60	50	36	22	13
108	67	57	43	27	18
107	76	66	50	33	22

再換個角度，我們來關心決定級距的前 1 %考生成績，假設每個級分背後的人數比例維持穩定，從大考中心的資料可查得，111年分科測驗數學甲的原始總分是落在 $80.47 < X \leq 81.91$ 這個區間者，就會是前 1 %的考生，共計有 176 人。這意味者數學甲總計 100 分的試卷，其中有 20 分的配分是為了鑑別前 1 %的考生，其餘 99 %的考生，拿到試卷的時候即是從 80 分開始往下扣分，因此整份試卷少寫了幾題或錯了幾題，在實際分發時候的影響並不顯著，既然如此，透過一點點的寬心來換取應試的情緒安定，筆者認為是一個可以嘗試的選擇。引用一些公開的資料，筆者提供一些個人的觀察與解讀，再給讀者們參考。如有錯誤也歡迎指正，或是有任何意見也歡迎一起交流。

第壹部分、選擇（填）題（占 76 分）

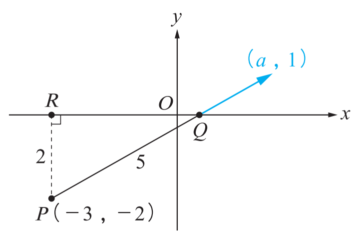
一、單選題（占 18 分）

說明：第 1. 題至第 3. 題，每題 6 分。

1. 坐標平面上，一質點由點 $(-3\,,\ -2)$ 出發，沿著向量 $(a\,,\,1)$ 的方向移動 5 單位長之後剛好抵達 x 軸，其中 a 為正實數。試問 a 值等於下列哪一個選項？

(1) $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$　(2) 2　(3) $\sqrt{5}$　(4) $\dfrac{\sqrt{21}}{2}$　(5) $2\sqrt{6}$

答　　案：(4)
命題出處：第三冊 A 第三章　平面向量
測驗目標：平面向量的意義
難 易 度：易
詳　　解：設質點由 $P(-3\,,-2)$ 沿著向量 $(a\,,\,1)$ 的方向抵達 x 軸上的 Q 點
並設 P 點在 x 軸上的垂足為 R 點
如右圖所示
由題意知 $\overline{PQ}=5$，$\overline{PR}=2$，可求得 $\overline{RQ}=\sqrt{21}$
則向量 $(a\,,\,1)\,//\,(\sqrt{21}\,,\,2)$，可知 $a=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$
故選(4)



2. 放射性物質的半衰期 T 定義為「每經過時間 T，該物質的質量會衰退成原來的一半」。鉛製容器中有 A、B 兩種放射性物質，其半衰期分別為 T_A、T_B。開始記錄時這兩種物質的質量相等，112 天後測量發現物質 B 的質量為物質 A 的質量的四分之一。根據上述，試問 T_A、T_B 滿足下列哪一個關係式？

(1) $-2+\dfrac{112}{T_A}=\dfrac{112}{T_B}$　(2) $2+\dfrac{112}{T_A}=\dfrac{112}{T_B}$　(3) $-2+\log_2\dfrac{112}{T_A}=\log_2\dfrac{112}{T_B}$

(4) $2+\log_2\dfrac{112}{T_A}=\log_2\dfrac{112}{T_B}$　(5) $2\log_2\dfrac{112}{T_A}=\log_2\dfrac{112}{T_B}$

答　　案：(2)
命題出處：第一冊第二章　指數、對數、第三冊 A 第二章　指數與對數函數
測驗目標：了解半衰期的意義及其與指數的連結
難 易 度：易

詳　　解：設 A、B 兩種物質在開始記錄時的質量皆為 W_0

則 112 天後，A 物質質量變為 $W_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{112}{T_A}}$、$B$ 物質質量變為 $W_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{112}{T_B}}$

由題意知 $W_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{112}{T_B}}=W_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{112}{T_A}}\cdot\frac{1}{4}$

$\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{112}{T_B}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{112}{T_A}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{112}{T_A}+2}\Rightarrow\frac{112}{T_B}=\frac{112}{T_A}+2$

故選(2)

3. 試問極限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}\left(\sqrt{4n^2+9\times1^2}+\sqrt{4n^2+9\times2^2}+\cdots\cdots+\sqrt{4n^2+9\times(n-1)^2}\right)$ 的值可用下列哪一個定積分表示？

(1) $\int_0^3\sqrt{1+x^2}\,dx$　(2) $\int_0^3\sqrt{1+9x^2}\,dx$　(3) $\int_0^3\sqrt{4+x^2}\,dx$

(4) $\int_0^3\sqrt{4+9x^2}\,dx$　(5) $\int_0^3\sqrt{4x^2+9}\,dx$

答　　案：(3)

命題出處：選修數學甲(上)第三章　積分

測驗目標：了解黎曼和與定積分的連結

難 易 度：中

詳　　解：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}\left(\sqrt{4n^2+9\times1^2}+\sqrt{4n^2+9\times2^2}+\cdots\cdots+\sqrt{4n^2+9\times(n-1)^2}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}\left(\sqrt{\frac{4n^2+9\times1^2}{n^2}}+\sqrt{\frac{4n^2+9\times2^2}{n^2}}+\cdots\cdots+\sqrt{\frac{4n^2+9\times(n-1)^2}{n^2}}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}\left(\sqrt{4+\left(\frac{3\times1}{n}\right)^2}+\sqrt{4+\left(\frac{3\times2}{n}\right)^2}+\cdots\cdots+\sqrt{4+\left(\frac{3\times(n-1)}{n}\right)^2}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}\left(\sqrt{4+\left(\frac{3\times1}{n}\right)^2}+\sqrt{4+\left(\frac{3\times2}{n}\right)^2}+\cdots\cdots+\sqrt{4+\left(\frac{3\times(n-1)}{n}\right)^2}+\sqrt{4+\left(\frac{3\times n}{n}\right)^2}-\sqrt{4+\left(\frac{3\times n}{n}\right)^2}\right)$

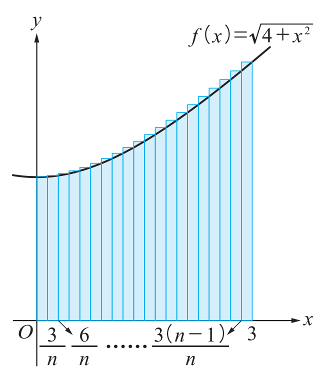
$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sqrt{4+\left(\frac{3i}{n}\right)^2}-\frac{3}{n}\cdot\sqrt{13}\right)$

因為 $\frac{3}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sqrt{4+\left(\frac{3i}{n}\right)^2}$ 可視為 $f(x)=\sqrt{4+x^2}$ 在 $x=0$

到 $x=3$ 時，曲線下面積的黎曼和

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sqrt{4+\left(\frac{3i}{n}\right)^2}=\int_0^3\sqrt{4+x^2}\,dx$

又因為 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}\cdot\sqrt{13}=0$



可知所求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}\left(\sqrt{4n^2+9\times1^2}+\sqrt{4n^2+9\times2^2}+\cdots\cdots+\sqrt{4n^2+9\times(n-1)^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sqrt{4+\left(\frac{3i}{n}\right)^2}-\frac{3}{n}\cdot\sqrt{13}\right)$$

$$=\int_0^3\sqrt{4+x^2}\,dx$$

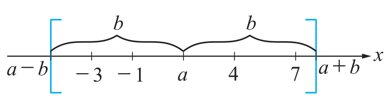
故選(3)

二、多選題（占 40 分）

說明：第 4. 題至第 8. 題，每題 8 分。

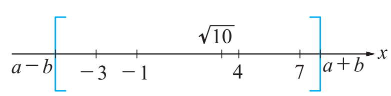
4. 設 a，b 為實數。已知四個數 -3，-1，4，7 皆滿足 x 的不等式 $|x-a|\leq b$，試選出正確的選項。
(1) $\sqrt{10}$ 也滿足 x 的不等式 $|x-a|\leq b$
(2) 3，1，-4，-7 滿足 x 的不等式 $|x+a|\leq b$
(3) $-\frac{3}{2}$，$-\frac{1}{2}$，2，$\frac{7}{2}$ 滿足 x 的不等式 $|x-a|\leq\frac{b}{2}$
(4) b 可能等於 4
(5) a，b 可能相等

答　　案：(1)(2)
命題出處：第一冊第一章　數與式
測驗目標：了解絕對值不等式的意義
難 易 度：中偏易
詳　　解：$\because |x-a|\leq b \Leftrightarrow a-b\leq x\leq a+b$



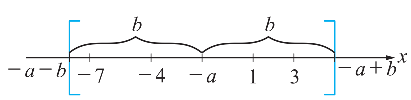
$\therefore\begin{cases}a-b\leq-3\\a+b\geq7\end{cases}$

(1) ○：$\because -1<\sqrt{10}<4$　$\therefore a-b\leq\sqrt{10}\leq a+b$



故 $\sqrt{10}$ 滿足 x 的不等式 $|x-a|\leq b$

(2) ○：$\because\begin{cases}a-b\leq-3\\a+b\geq7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-a+b\geq3\\-a-b\leq-7\end{cases}$



$\therefore |x+a|\leq b$ 的解集合必然包含 $[-7,3]$

故 3，1，-4，-7 滿足 x 的不等式 $|x+a|\leq b$

(3) ╳：取 $a=7$，$b=10$，則

$|x-a|\leq b\Leftrightarrow|x-7|\leq10$

$\Leftrightarrow-3\leq x\leq17$

滿足題意

但 $|x-a|\leq\frac{b}{2}\Leftrightarrow|x-7|\leq 5\Leftrightarrow 2\leq x\leq 12$

解集合不包含 $-\frac{3}{2}$，$-\frac{1}{2}$

(4) ╳：令 $b=4$ 代入 $\begin{cases}a-b\leq -3\\a+b\geq 7\end{cases}$，則 $\begin{cases}a\leq 1\\a\geq 3\end{cases}$ 產生矛盾，故不合

(5) ╳：令 $a=b$ 代入 $\begin{cases}a-b\leq -3\\a+b\geq 7\end{cases}$，則 $\begin{cases}0\leq -3\\a\geq\frac{7}{2}\end{cases}$ 產生矛盾，故不合

故選(1)(2)

5. 考慮實係數多項式 $f(x)=x^4-4x^3-2x^2+ax+b$。已知方程式 $f(x)=0$ 有虛根 $1+2i$ (其中 $i=\sqrt{-1}$)，試選出正確的選項。
(1) $1-2i$ 也是 $f(x)=0$ 的根
(2) a，b 皆為正數
(3) $f'(2.1)<0$
(4)函數 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 有局部極小值
(5) $y=f(x)$ 圖形反曲點的 x 坐標皆大於 0

答　　案：(1)(3)
命題出處：選修數學甲(上)第二章　微分、選修數學甲(下)第二章　複數與多項式方程式
測驗目標：多項式方程式與微分的應用
難 易 度：中
詳　　解：(1) ○：因為 $f(x)$ 是實係數多項式，所以由虛根成對定理可知
當 $1+2i$ 是方程式 $f(x)=0$ 的一虛根，則 $1-2i$ 也是 $f(x)=0$ 的虛根
(2) ╳：$\because f(x)=[x-(1+2i)][x-(1-2i)]g(x)=(x^2-2x+5)g(x)$，
使用長除法可得

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & x^2 & -2x & -11 & & \\ \hline
x^2-2x+5 & x^4 & -4x^3 & -2x^2 & +ax & +b \\
 & x^4 & -2x^3 & +5x^2 & & \\ \hline
 & & -2x^3 & -7x^2 & +ax & \\
 & & -2x^3 & +4x^2 & -10x & \\ \hline
 & & & -11x^2 & +(a+10)x & +b \\
 & & & -11x^2 & +22x & -55 \\ \hline
 & & & & & 0
\end{array}$$

$\therefore(a+10)-22=0$，$b-(-55)=0$
故 $a=12$，$b=-55$
$\therefore f(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x-55$

(3) ○：$\because f'(x)=4x^3-12x^2-4x+12$

$=4(x-2)^3+12(x-2)^2-4(x-2)-12$

$\therefore f'(2.1)\approx -4(2.1-2)-12<0$

$$\begin{array}{rrrr|r}
4 & -12 & -4 & +12 & 2 \\
 & +8 & -8 & -24 & \\
\hline
4 & -4 & -12 & -12 & \\
 & +8 & +8 & & \\
\hline
4 & +4 & -4 & & \\
 & +8 & & & \\
\hline
4 & +12 & & &
\end{array}$$

(4) ╳：$\because f'(x)=4(x^3-3x^2-x+3)$

$=4(x-1)(x^2-2x-3)$

$=4(x-1)(x+1)(x-3)$

x		-1		1		3	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗		↘		↗

$\therefore$函數 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 有局部極大值

(5) ╳：$\because f''(x)=12x^2-24x-4$

$$=12\left(x-\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right)\left(x-\frac{3-2\sqrt{3}}{3}\right)$$

$\therefore y=f(x)$ 圖形反曲點的 x 坐標分別是 $\frac{3+2\sqrt{3}}{3}>0$ 及 $\frac{3-2\sqrt{3}}{3}<0$

故選(1)(3)

6. 設 a，b，c，d，r，s，t 皆為實數，已知坐標空間中三個非零向量 $\overrightarrow{u}=(a,b,0)$、$\overrightarrow{v}=(c,d,0)$ 及 $\overrightarrow{w}=(r,s,t)$ 滿足內積 $\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{u}=\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{v}=0$。考慮三階方陣 $A=\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ r & s & t \end{bmatrix}$，試選出正確的選項。

(1)若 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$，則行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$

(2)若 $t\neq 0$，則行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$

(3)若存在一個向量 $\overrightarrow{w'}$ 滿足 $\overrightarrow{w'}\cdot\overrightarrow{u}=\overrightarrow{w'}\cdot\overrightarrow{v}=0$ 且外積 $\overrightarrow{w'}\times\overrightarrow{w}\neq\overrightarrow{0}$，則行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$

(4)若對任意三個實數 e，f，g，向量 (e,f,g) 都可以表示成 $\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$，$\overrightarrow{w}$ 的線性組合，則行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$

(5)若行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$，則 A 的行列式不等於 0

答　　案：(1)(4)(5)

命題出處：第四冊 A 第一章　空間向量

測驗目標：空間向量結合行列式與外積的幾何意義

難 易 度：中偏難

詳　解：因為 $\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$ 的 z 分量皆為 0，

所以 $\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$ 可視為 xy 平面上的二維向量

由 $\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{u}=\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{v}=0$ 可知 $\overrightarrow{w}$ 是 $\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$ 的公垂向量

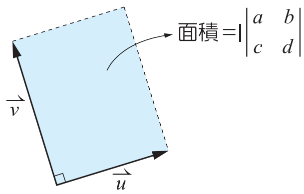
(i) 若 $\overrightarrow{u}$ 和 $\overrightarrow{v}$ 不平行，則 $r=s=0$，$t\neq0$，即 $\overrightarrow{w}=(0,0,t)$

(ii) 若 $\overrightarrow{u}$ 和 $\overrightarrow{v}$ 平行，則 r，s 須滿足 $ar+bs=0$，t 為任意實數

(1) ○：$\because\ \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0\Rightarrow\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v}$

$\therefore\left|\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}\right|=\overrightarrow{u}$ 和 $\overrightarrow{v}$ 圍成的平行四邊形面積

$\neq0$



故 $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}\neq0$

(2) ╳：$\overrightarrow{u}$ 和 $\overrightarrow{v}$ 可能平行，此時 $\overrightarrow{u}$ 和 $\overrightarrow{v}$ 無法圍成平行四邊形

故 $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=0$

(3) ╳：由 $\overrightarrow{w'}\cdot\overrightarrow{u}=\overrightarrow{w'}\cdot\overrightarrow{v}=0$ 可知 $\overrightarrow{w'}$ 是 $\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$ 的公垂向量

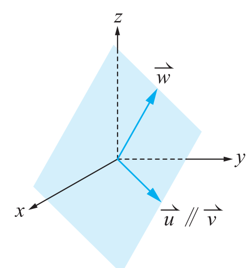
假設 $\overrightarrow{u}$ 和 $\overrightarrow{v}$ 不平行，

則 $\overrightarrow{w'}=(0,0,t')\ //\ \overrightarrow{w}=(0,0,t)$

但外積 $\overrightarrow{w'}\times\overrightarrow{w}\neq\overrightarrow{0}$ 表 $\overrightarrow{w'}$ 和 $\overrightarrow{w}$ 不平行，產生矛盾

故 $\overrightarrow{u}$ 和 $\overrightarrow{v}$ 平行，因此 $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=0$

(4) ○：若 $\overrightarrow{u}$ 和 $\overrightarrow{v}$ 平行，則 $\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$，$\overrightarrow{w}$ 僅能張成一個二維平面，故無法透過 $\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$，$\overrightarrow{w}$ 的線性組合表示任意的三維向量



因此 $\overrightarrow{u}$ 和 $\overrightarrow{v}$ 必不平行，

則 $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}\neq0$

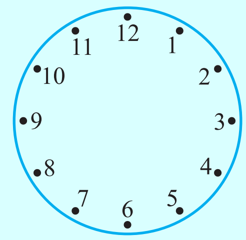
(5) ○：若 $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}\neq0$，表示 $\overrightarrow{u}$ 和 $\overrightarrow{v}$ 必不平行，

則 $r=s=0$，$t\neq0$

故 A 的行列式為 $\begin{vmatrix}a&b&0\\c&d&0\\0&0&t\end{vmatrix}=t\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}\neq0$

故選(1)(4)(5)

7. 有一個依順時針方向依序標示 1，2，……，12 數字的圓形時鐘 (如圖所示)。一開始在此時鐘「12」點鐘位置擺設一枚棋子，然後每次投擲一枚均勻銅板，依投擲結果，照以下規則移動這枚棋子的位置：



- 若出現正面，將棋子從當時位置依順時針方向移動 5 個鐘點。
- 若出現反面，將棋子從當時位置依逆時針方向移動 5 個鐘點。

例如：若投擲銅板三次均為正面，則棋子第一次移動到「5」點鐘位置、第二次移動到「10」點鐘位置，第三次移動到「3」點鐘位置。

對任一正整數 n，令隨機變數 X_n 代表依上述規則經過 n 次移動後棋子所在的點鐘位置，$P(X_n=k)$ 代表 $X_n=k$ 的機率 (其中 $k=1$，2，……，12)，且令 $E(X_n)$ 代表 X_n 的期望值。試選出正確的選項。

(1) $E(X_1)=6$　(2) $P(X_2=12)=\dfrac{1}{4}$　(3) $P(X_8=5)\geq\dfrac{1}{2^8}$

(4) $P(X_8=4)=P(X_8=8)$　(5) $E(X_8)\leq 7$

答　　案：(1)(4)

命題出處：選修數學甲(下)第三章　機率統計

測驗目標：隨機變數的意義及期望值

難 易 度：中偏難

詳　　解：(1) ○：依題意知，X_1 是經過 1 次移動後棋子所在的點鐘位置

因此當投擲一次銅板，出現正面時，$X_1=5$；出現反面時，$X_1=7$

故 $E(X_1)=5\times\dfrac{1}{2}+7\times\dfrac{1}{2}=6$

(2) ╳：若 $X_2=12$，必為投擲兩次銅板出現一次正面一次反面的狀況

故 $P(X_2=12)=P(\text{一正一反})=C_1^2\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$

(3) ╳：X_8 是經過 8 次移動後棋子所在的點鐘位置，列舉投擲八次銅板的狀況如下：

	8 正	7 正 1 反	6 正 2 反	5 正 3 反	4 正 4 反	3 正 5 反	2 正 6 反	1 正 7 反	8 反
移動狀況	順時針移 40 格	順時針移 30 格	順時針移 20 格	順時針移 10 格	停留原地	逆時針移 10 格	逆時針移 20 格	逆時針移 30 格	逆時針移 40 格
X_8	4	6	8	10	12	2	4	6	8
機率	$\frac{C_8^8}{2^8}$	$\frac{C_7^8}{2^8}$	$\frac{C_6^8}{2^8}$	$\frac{C_5^8}{2^8}$	$\frac{C_4^8}{2^8}$	$\frac{C_3^8}{2^8}$	$\frac{C_2^8}{2^8}$	$\frac{C_1^8}{2^8}$	$\frac{C_0^8}{2^8}$

如上表，投擲八次銅板後不可能停留在「5」點鐘

故 $P(X_8=5)=0$

(4) ○：如上表，$P(X_8=4)=\dfrac{C_8^8+C_2^8}{2^8}=\dfrac{C_0^8+C_6^8}{2^8}=P(X_8=8)$

【另解】

因為「4」點鐘位置是起點的順時針 4 格、「8」點鐘位置是起點的逆時針 4 格，基於對稱性，兩者的機率必相同

(5) ╳：如上頁表，

$$E(X_8)=\frac{4C_8^8+6C_7^8+8C_6^8+10C_5^8+12C_4^8+2C_3^8+4C_2^8+6C_1^8+8C_0^8}{2^8}=\frac{1956}{256}$$

$\approx 7.6>7$

故選(1)(4)

8. 複數平面上，設 $\bar{z}$ 代表複數 z 的共軛複數，且 $i=\sqrt{-1}$ 。試選出正確的選項。
(1)若 $z=2i$，則 $z^3=4i\bar{z}$
(2)若非零複數 α 滿足 $\alpha^3=4i\bar{\alpha}$ ，則 $|\alpha|=2$
(3)若非零複數 α 滿足 $\alpha^3=4i\bar{\alpha}$ 且令 $\beta=i\alpha$，則 $\beta^3=4i\bar{\beta}$
(4)滿足 $z^3=4i\bar{z}$ 的所有非零複數 z 中，其主輻角的最小可能值為 $\frac{\pi}{6}$
(5)恰有 3 個相異非零複數 z 滿足 $z^3=4i\bar{z}$

答　　案：(2)(3)

命題出處：選修數學甲(下)第二章　複數與多項式方程式

測驗目標：複數的運算和極式及其幾何意義

難 易 度：中偏難

詳　　解：(1) ╳：若 $z=2i$，則 $z^3=(2i)^3=8i^3=-8i$

$4i\bar{z}=4i\cdot(\overline{2i})=4i\cdot(-2i)=-8i^2=8$，故 $z^3\neq 4i\bar{z}$

(2) ○：$\because \alpha^3=4i\bar{\alpha}\Rightarrow|\alpha^3|=|4i\bar{\alpha}|\Rightarrow|\alpha|^3=|4i|\cdot|\bar{\alpha}|=4|\alpha|$

又 α 為非零複數　$\therefore|\alpha|^2=4$，故 $|\alpha|=2$

(3) ○：$\because \beta=i\alpha\Rightarrow\beta^3=(i\alpha)^3=-i\alpha^3$，且 $\bar{\beta}=\overline{i\alpha}=\bar{i}\cdot\bar{\alpha}=-i\bar{\alpha}$

$\therefore \beta^3=-i\alpha^3=-i\cdot(4i\bar{\alpha})=4i\cdot(-i\bar{\alpha})=4i\bar{\beta}$，故 $\beta^3=4i\bar{\beta}$

(4) ╳：承(2)可知 $|z|=2$，因此 z 可用極式表為 $z=2(\cos\theta+i\sin\theta)$，則

$z^3=8(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)$

又 $\bar{z}=\overline{2(\cos\theta+i\sin\theta)}=2(\cos\theta-i\sin\theta)=2(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$，

故 $4i\bar{z}=4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$

$$=8\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)$$

$$\because z^3=4i\bar{z}\Rightarrow 8(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)=8\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)$$

$$\Rightarrow 3\theta=\frac{\pi}{2}-\theta+2k\pi\Rightarrow 4\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi，k\in\mathbb{Z}$$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{8}+\frac{2k\pi}{4}$，$k\in\mathbb{Z}$

故滿足 $z^3=4i\bar{z}$ 的非零複數 z 為 $2\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{2k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{2k\pi}{4}\right)\right)$，

其中可取 $k=0，1，2，3$

取 $k=0$ 時，有最小的主輻角為 $\frac{\pi}{8}$

(5) ╳：承(4)可知，恰有 4 個相異非零複數 z 滿足 $z^3=4i\bar{z}$

故選(2)(3)

三、選填題（占 18 分）

說明：第 9. 題至第 11. 題，每題 6 分。

9. 已知平面上直角△ABC 的三邊長 $\overline{AB}=\sqrt{7}$ 、$\overline{AC}=\sqrt{3}$ 、$\overline{BC}=2$。若分別以 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 為底邊在△ABC 的外部作頂角等於 120° 的等腰三角形△MAB 與△NAC，則 $\overline{MN}^2=$ $\dfrac{⑨\text{-}1\ ⑨\text{-}2}{⑨\text{-}3}$ 。(化為最簡分數)

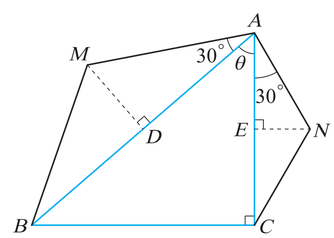
答　　案：$\dfrac{13}{3}$

命題出處：第二冊第四章　三角比、第三冊 A 第一章　三角函數

測驗目標：能正確解讀題意畫出圖形，餘弦定理結合和角公式的應用

難 易 度：中

詳　　解：依據題意畫出右圖



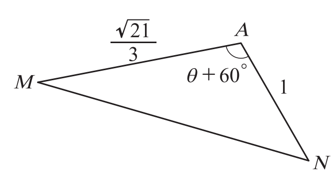
過 M、N 分別對 $\overline{AB}$ 、$\overline{AC}$ 做高，得到△AMD、△ANE 皆為 $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ 三角形，可知

$\overline{AM}=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$ 、$\overline{AN}=1$

令 $\angle BAC=\theta$，由直角△ABC 可得 $\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$ 、$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ ，

則
$$\begin{aligned}\cos\angle MAN&=\cos(\theta+60^\circ)\\&=\cos\theta\cos 60^\circ-\sin\theta\sin 60^\circ\\&=\frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\frac{-\sqrt{21}}{14}\end{aligned}$$

連接 $\overline{MN}$ ，在△AMN 中，由餘弦定理可知



$$\begin{aligned}\overline{MN}^2&=\left(\frac{\sqrt{21}}{3}\right)^2+1^2-2\cdot\frac{\sqrt{21}}{3}\cdot 1\cdot\cos\angle MAN\\&=\frac{21}{9}+1-2\cdot\frac{\sqrt{21}}{3}\cdot 1\cdot\left(\frac{-\sqrt{21}}{14}\right)\\&=\frac{13}{3}\end{aligned}$$

故所求為 $\dfrac{13}{3}$

10. 坐標空間中有方向向量為 $(1,-2,2)$ 的直線 L、平面 $E_1：2x+3y+6z=10$ 與平面 $E_2：2x+3y+6z=-4$。則 L 被 E_1、E_2 所截線段的長度為 $\dfrac{\text{10-1}\ \text{10-2}}{\text{10-3}}$。(化為最簡分數)

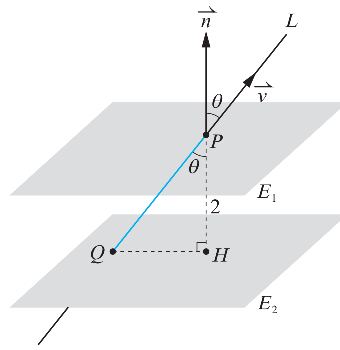
答　　案：$\dfrac{21}{4}$

命題出處：第四冊 A 第二章　空間中的平面與直線

測驗目標：空間中的平面和直線的關係

難 易 度：中偏易

詳　　解：如右示意圖，令直線 L 和平面 E_1、E_2 分別交於點 P、點 Q



設點 P 在平面 E_2 的投影點為點 H

設 L 被 E_1、E_2 所截線段 $\overline{PQ}$ 和 $\overline{PH}$ 的夾角為 θ

$\because E_1 \,/\!/\, E_2 \quad \therefore \overline{PQ}\cdot\cos\theta=\overline{PH}$

其中 $\overline{PH}=d(E_1,E_2)=\left|\dfrac{10-(-4)}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}}\right|=2$

又因為 θ 亦為直線 L 的方向向量 $\vec{v}=(1,-2,2)$ 和平面 E_2 的法向量 $\vec{n}=(2,3,6)$ 的夾角之一，故可知

$$\cos\theta=\left|\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{|\vec{v}||\vec{n}|}\right|=\left|\dfrac{(1,-2,2)\cdot(2,3,6)}{|(1,-2,2)|\,|(2,3,6)|}\right|=\left|\dfrac{2-6+12}{3\times 7}\right|=\dfrac{8}{21}$$

代入 $\overline{PQ}\cdot\cos\theta=\overline{PH}$，可得 $\overline{PQ}=\dfrac{1}{\cos\theta}\cdot\overline{PH}=\dfrac{21}{8}\cdot 2=\dfrac{21}{4}$

故所求為 $\dfrac{21}{4}$

11. 百貨公司舉辦父親節抽牌送獎品活動，規則如下：主辦單位準備編號 1、2、……、9 的牌卡十張，其中編號 8 的牌卡有兩張，其他編號的牌卡均只有一張。從這十張牌隨機抽出四張，且抽出不放回，依抽出順序由左至右排列成一個四位數。若排成的四位數滿足下列任一個條件，就可獲得獎品：

(1)此四位數大於 6400

(2)此四位數含有兩個數字 8

例如：若抽出四張牌編號依序為 5、8、2、8，則此四位數為 5828，可獲得獎品。依上述規則，共有 11-1 11-2 11-3 11-4 個抽出排成的四位數可獲得獎品。

答　　案：1554

命題出處：第二冊第三章　排列組合與機率

測驗目標：基本的排列組合概念，並了解計數時宜適當分類討論

難 易 度：中

詳　　解：依據題意可知，當抽出兩張編號 8 的牌時，無論四位數字如何排列，皆可直接獲獎；而編號 8 的牌少於兩張時，則需要考慮四位數字之大小才能判斷是否獲獎

因此分成兩大類進行討論：

(1)抽出 2 張編號 8 的牌卡：

牌卡型式

$88\square\bigcirc \Rightarrow C^8_2\times\dfrac{4!}{2!}=\dfrac{8\times7}{2}\times4\times3=336$

從 8 以外隨意挑出 2 個數字後，
再任意排列成四位數字

(2)抽出 0 或 1 張編號 8 的牌卡：

因本題只考慮排列成的四位數字是什麼，而非計算機率，故不需考慮抽出編號 8 的牌的可能性大小。因此在此分類下的狀況可以視為「從 1～9 挑出四個不重複數字排列成四位數，其中大於 6400 的四位數有幾種？」

故將四位數再分成

(i) $64\square\square \Rightarrow 7\times6=42$

剩下數字中，任意選兩個不重複數字

(ii) $6\triangle\square\square \Rightarrow C^4_1\times7\times6=168$

剩下數字中，任意選兩個不重複數字

只可以是 5、7、
8、9 其中之一

(iii) $\triangle\square\square\square \Rightarrow C^3_1\times8\times7\times6=1008$

剩下數字中，任意選三個不重複數字

只可以是 7、8、9
其中之一

故所求為 $336+42+168+1008=1554$ 個

第貳部分、混合題或非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有 2 題組，選填題每題 2 分，非選擇題配分標於題末。限在標示題號的作答區內作答。選擇 (填) 題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶 (液)。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

12－14 題為題組

設 a，b 為實數，並設 O 為坐標平面的原點。已知二次函數 $f(x)=ax^2$ 的圖形與圓 Ω：$x^2+y^2-3y+b=0$ 皆通過點 $P\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$，並令點 C 為 Ω 的圓心。根據上述，試回答下列問題。

12. 試求向量 $\overrightarrow{CO}$ 與 $\overrightarrow{CP}$ 夾角的餘弦值。(非選擇題，2 分)

答　　案：$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

命題出處：第一冊第四章　直線與圓、第三冊 A 第三章　平面向量

測驗目標：圓方程式結合向量的應用

難 易 度：中偏易

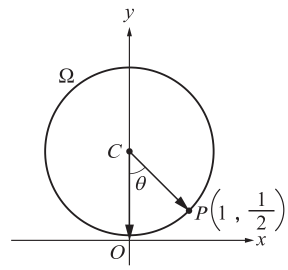
詳　　解：因為點 $P\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$ 在圓 Ω 上，將點 P 代入圓方程式可得

$1^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-3\cdot\dfrac{1}{2}+b=0$，解出 $b=\dfrac{1}{4}$

得圓 $\Omega：x^2+y^2-3y+\dfrac{1}{4}=0$

將之化為標準式為 $\Omega：x^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=2$

可以知道其圓心 $C\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$，半徑 $r=\sqrt{2}$



故 $\overrightarrow{CO}=\left(0,\dfrac{-3}{2}\right)$，$\overrightarrow{CP}=(1,-1)$

設 $\overrightarrow{CO}$ 與 $\overrightarrow{CP}$ 的夾角為 θ，則 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CP}}{|\overrightarrow{CO}||\overrightarrow{CP}|}=\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

故所求為 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

13. 試證明 $y=f(x)$ 圖形與 Ω 在 P 點有共同的切線。(非選擇題，4 分)

答　　案：略

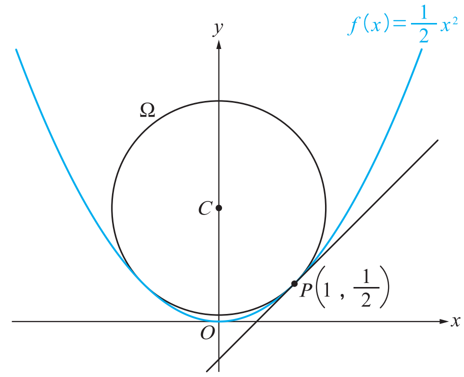
命題出處：第一冊第三章　多項式函數、第一冊第四章　直線與圓、
選修數學甲(上)第二章　微分

測驗目標：圓和多項式函數圖形上的切線概念

難 易 度：中

詳　　解：因為點 $P\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$ 在二次函數 $f(x)=ax^2$ 的圖形上，可解出 $a=\dfrac{1}{2}$，

並依題意可以作圖如右



(1)設 Ω 在 P 點的切線為 L

∵ $\overline{CP}$ 的斜率 $m_{\overline{CP}}=-1$ 且 $\overline{CP}\perp L$

切線 L 的斜率為 $m_L=1$

(2)設 $y=f(x)$ 圖形在 P 點的切線為 L'

∵ $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2\Rightarrow f'(x)=x\Rightarrow f'(1)=1$

$\therefore y=f(x)$圖形在點 $P\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$的切線 L'，其斜率為 $m_{L'}=f'(1)=1$

由以上討論可知，切線 L 和切線 L' 皆為通過 P 點且斜率為 1 的直線

故可證得 $y=f(x)$ 圖形與 Ω 在 P 點有共同的切線

14. 試求 $y=f(x)$ 圖形上方與 Ω 下半圓弧所圍區域的面積。(非選擇題，6 分)

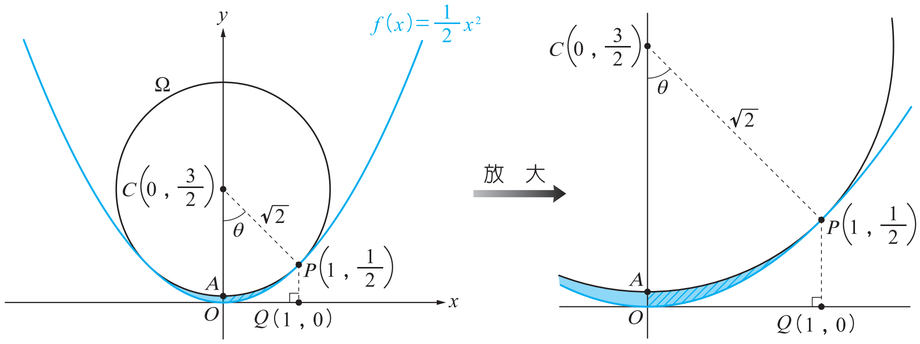
答　　案：$\dfrac{5}{3}-\dfrac{\pi}{2}$

命題出處：選修數學甲(上)第三章　積分

測驗目標：利用積分求解圖形的面積

難 易 度：中

詳　　解：令點 P 在 x 軸上的投影點為點 $Q(1,0)$，$\overline{CO}$ 和 y 軸交於 A 點，如下圖所示



依題意可知題目所求之區域即為著色之區塊

考慮所求之區域被 y 軸切割而得的右半斜線區域，則由對稱性易知

(所求之區域面積)$=2\times$(斜線區域面積)

其中 (斜線區域面積)

$=$(梯形 $OCPQ$ 面積)$-$(扇形 ACP 面積)

$-$($y=f(x)$ 圖形和 x 軸在 $x=0$ 到 $x=1$ 時，所圍的曲線下面積)

(1) (梯形 $OCPQ$ 面積)$=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\right)\times1\times\dfrac{1}{2}=1$

(2)由第 12 題求得的 $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，可知$\angle ACP=\theta=\dfrac{\pi}{4}$且圓 Ω 之半徑 $r=\sqrt{2}$

故(扇形 ACP 面積)$=\dfrac{1}{2}r^2\theta=\dfrac{\pi}{4}$

(3) ($y=f(x)$ 圖形和 x 軸在 $x=0$ 到 $x=1$ 時，所圍的曲線下面積)

$$=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{1}{2}x^2dx=\frac{1}{6}x^3\Big|_0^1=\frac{1}{6}$$

故 (所求之區域面積)$=2\times$(斜線區域面積)

$$=2\times\left(1-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{6}\right)=\frac{5}{3}-\frac{\pi}{2}$$

15－17 題為題組

坐標平面上，設 Γ 為中心在原點且長軸落在 y 軸上的橢圓。已知對原點逆時針旋轉 θ 角 (其中 $0<\theta<\pi$) 的線性變換將 Γ 變換到新橢圓 Γ'：$40x^2+4\sqrt{5}xy+41y^2=180$，點 $\left(-\frac{5}{3},\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$ 為 Γ' 上離原點最遠的兩點之一。根據上述，試回答下列問題。

15. 橢圓 Γ' 的長軸長為 ＿15-1 $\sqrt{\text{15-2}}$＿。(化為最簡根式) (選填題，2 分)

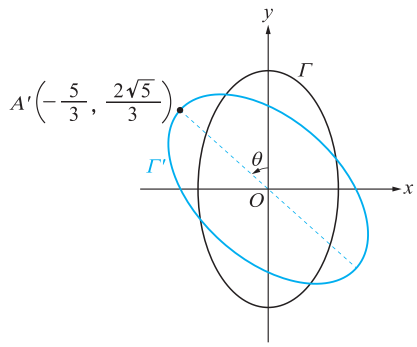
答　　案：$2\sqrt{5}$

命題出處：選修數學甲(下)第一章　二次曲線

測驗目標：橢圓的定義

難 易 度：易

詳　　解：依據題意作示意圖如右



因為橢圓 Γ 的中心在原點 O，故經過對原點旋轉的線性變換後所得的新橢圓 Γ'，其中心位置不變，仍為原點 O

因此點 $A'\left(-\frac{5}{3},\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$ 即為橢圓 Γ' 長軸上的端點之一

則所求橢圓 Γ' 的長軸長為 $2\times\overline{OA'}=2\times\sqrt{\left(-\frac{5}{3}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2}=2\sqrt{5}$

16. 試求 Γ' 短軸所在的直線方程式與短軸長。(非選擇題，4 分)

答　　案：直線方程式為 $y=\frac{\sqrt{5}}{2}x$，短軸長為 4

命題出處：選修數學甲(下)第一章　二次曲線

測驗目標：了解橢圓的長軸與短軸的關係

難 易 度：中

詳　　解：橢圓 Γ' 的長軸在 $\overleftrightarrow{OA'}$ 上，

$\overleftrightarrow{OA'}$ 的斜率為 $m_{\overleftrightarrow{OA'}}=\dfrac{0-\frac{2\sqrt{5}}{3}}{0-\left(-\frac{5}{3}\right)}=\dfrac{-2\sqrt{5}}{5}$

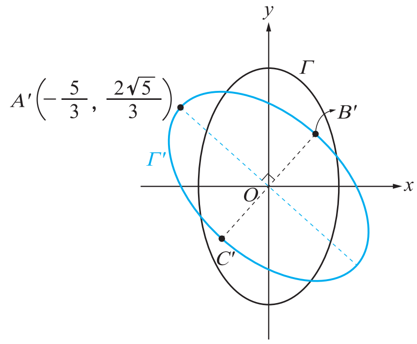
$\because$ 橢圓 Γ' 的短軸垂直長軸

$\therefore$ 短軸的斜率為 $m=\dfrac{-1}{m_{\overleftrightarrow{OA'}}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

又短軸通過橢圓中心 $(0,0)$，

故短軸所在的直線方程式為 $y=\dfrac{\sqrt{5}}{2}x$

將短軸所在的直線方程式 $y=\dfrac{\sqrt{5}}{2}x$ 及橢圓 Γ' 的方程式解聯立，可得短軸上兩端點的坐標如下：



$$\begin{cases} y=\dfrac{\sqrt{5}}{2}x \\ 40x^2+4\sqrt{5}xy+41y^2=180 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 40x^2+4\sqrt{5}x\left(\frac{\sqrt{5}}{2}x\right)+41\left(\frac{\sqrt{5}}{2}x\right)^2=180$$

$$\Rightarrow 405x^2=720$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow (x,y)=\left(\frac{4}{3},\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)\text{或}\left(-\frac{4}{3},-\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$$

因此短軸上兩端點的坐標分別為 $B'\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{2\sqrt{5}}{3}\right)$ 及 $C'\left(-\dfrac{4}{3},-\dfrac{2\sqrt{5}}{3}\right)$

故短軸長為 $\sqrt{\left(\dfrac{4}{3}+\dfrac{4}{3}\right)^2+\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{3}+\dfrac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{64}{9}+\dfrac{80}{9}}=4$

17. 已知在 Γ 上的一點 P 經由此旋轉後得到的點 P' 落在 x 軸上，且 P' 點的 x 坐標大於 0。試求 P 點的坐標。(非選擇題，6 分)

答　　案：$\left(\sqrt{2},-\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)$

命題出處：第四冊 A 第四章　矩陣、選修數學甲(下)第一章　二次曲線

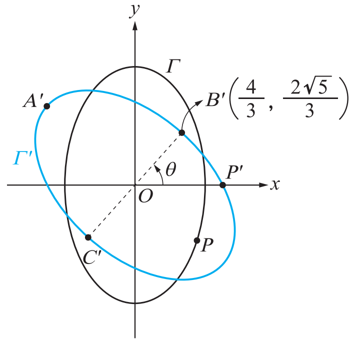
測驗目標：橢圓的定義結合平面上的線性變換

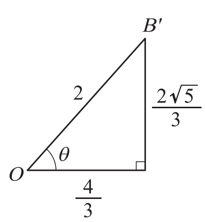
難 易 度：中

詳　　解：因為 Γ 的短軸落在 x 軸上，Γ' 的短軸在 $\overleftrightarrow{OB'}$ 上

可知逆時針旋轉的 θ 角位置如下示意圖所示

且 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，$\cos\theta=\dfrac{2}{3}$





令 $y=0$ 代入新橢圓 Γ' 的方程式，可解得 $x=\pm\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

又因為 P' 點的 x 坐標大於 0，可知 $P'\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, 0\right)$

$\because P \xrightarrow{\text{逆時針旋轉 } \theta \text{ 角}} P'$

$\therefore P' \xrightarrow{\text{順時針旋轉 } \theta \text{ 角}} P$

令二階矩陣 T 表示對原點順時針旋轉 θ 角的線性變換，則

$T=\begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} \\ -\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$，且 $P=TP'$

因此 $P=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} \\ -\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix}$

故所求坐標為 $P\left(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{n(2a+(n-1)d)}{2}$

   首項為 a，公比為 r $(r\neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 級數和：$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ；$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

3. 三角函數的和角公式：$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

   $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

   $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

4. $\triangle ABC$ 的正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ (R 為$\triangle ABC$ 外接圓半徑)

   $\triangle ABC$ 的餘弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

5. 一維數據 X：x_1，x_2，……，x_n，

   算術平均數 $\mu_X=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i$ ；標準差 $\sigma_X=\sqrt{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\mu_X^2\right)}$

6. 二維數據 (X,Y)：(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，……，(x_n,y_n)，

   相關係數 $r_{X,Y}=\dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

   最適直線(迴歸直線)方程式 $y-\mu_Y=r_{X,Y}\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$

7. 參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414$，$\sqrt{3}\approx 1.732$，$\sqrt{5}\approx 2.236$，$\sqrt{6}\approx 2.449$，$\pi\approx 3.142$

   $\sin 23^\circ\approx 0.40$，$\sin 37^\circ\approx 0.60$，$\sin 53^\circ\approx 0.80$，$\cos 23^\circ\approx 0.92$，$\cos 37^\circ\approx 0.80$，$\cos 53^\circ\approx 0.60$

8. 對數值：$\log 2\approx 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$，$\log 5\approx 0.6990$，$\log 7\approx 0.8451$

9. 若 $X\sim B(n,p)$ 為二項分布，則期望值 $E(X)=np$，變異數 $\mathrm{Var}(X)=np(1-p)$；

   若 $X\sim G(p)$ 為幾何分布，則期望值 $E(X)=\dfrac{1}{p}$，變異數 $\mathrm{Var}(X)=\dfrac{(1-p)}{p^2}$。