翰林

105指考
精彩解析

數學考科

家齊女中 / 黃峻棋 老師

【試題．答案】依據大考中心公布內容

發行人 / 陳炳亨
總召集 / 陳彥良
總編輯 / 蔣海燕
主　編 / 江欣穎
校　對 / 羅蔣偉．陳盈如
美　編 / 邱意診．杜政賢
本書內容同步刊載於翰林我的網

出　版 / 民國一〇五年七月
發行所 / 70248臺南市新樂路 76 號
編輯部 / 70252臺南市新忠路 8-1 號
電　話 / (06) 2619621 #311
E-mail / periodical@hanlin.com.tw
翰林我的網 http://www.worldone.com.tw

00843-23
Z X C V

試題分析 數學甲

家齊女中．黃峻棋 老師

一 前 言

103 指考數學甲五標				
頂標	前標	均標	後標	底標
68	59	45	30	19

104 指考數學甲五標				
頂標	前標	均標	後標	底標
67	56	40	25	16

這幾年，參加指考的學生程度呈現兩極化的情形滿明顯的。因此儘管數甲題目難易適中，但考出來的成績卻逐年下降。今年由於報名指考的人數又創新低，是否也是呈現這樣的狀況，值得持續觀察。

從試題的難易度來看，數甲的題目基本上都會考兩個觀念以上，有些還會包含大量的計算。本人把它分成三類：

1 中等偏易的題型：
- 1 以 103 指考為例：單選 1、2，選填 A、B。
- 2 以 104 指考為例：單選 1、2，選填 C、計算一。

2 中等的題型：
- 1 以 103 指考為例：單選 3、4，多選 6、9，計算一。
- 2 以 104 指考為例：單選 3、4，多選 5、6、7、8，選填 A。

3 中等偏難的題型：
- 1 以 103 指考為例：多選 5、7、8，計算二。
- 2 以 104 指考為例：選填 B，計算二。

我個人認為一份最好的數甲試題，五標的分布如（75，65，50，35，25），這樣應該最能區分出學生程度的好壞。當然這個也考驗著出題教授對學生程度的掌握情況是否精準。

對學生而言，只要能掌握中等或中等偏易的所有題目，數學這科就立於不敗之地了。

二 試題分析

1 105 大學指考數學甲考試重點（打★者是 104 指考考過的重點）

第一冊	數與式	1 分點公式 2 含絕對值的一次方程式與不等式
	多項式函數	★1 除法原理（含因式、餘式定理） 2 插值多項式（不超過三次） 3 整係數一次因式檢驗法 4 勘根定理 ★5 虛根成對性質
	指數與對數函數	1 函數圖形的性質 2 換底公式 ★3 指、對數方程式與不等式 4 首數與尾數（查表）
第二冊	機率	1 古典機率的定義與性質 ★2 條件機率與貝氏定理 3 獨立事件
第三冊	三角	★1 正弦、餘弦定理 2 差角、和角、倍角、半角公式 3 三角函數值表 4 平面與立體測量
	直線與圓	1 直線方程式 2 二元一次不等式 3 線性規劃（目標函數為一次式） 4 圓方程式 ★5 圓與直線的關係
	平面向量	★1 平面向量表示法 2 向量線性組合 3 直線參數式 4 向量的內積及應用 5 柯西不等式 6 二階行列式及應用 7 二階克拉瑪公式

第四冊	空間向量	1 空間概念（立體圖形、坐標化） 2 空間向量內積及應用 ★3 向量外積、外積與面積的關係 4 三階行列式的定義與性質
	空間中的平面與直線	1 空間平面方程式 2 空間直線方程式 3 高斯消去法（三元一次聯立方程式的解） 4 三平面幾何關係的代數判定
	矩陣	1 線性方程組與矩陣 2 矩陣的運算 3 轉移矩陣、乘法反方陣 ★4 平面上的線性變換與二階方陣
選修數學甲	機率統計II	1 隨機的意義 ★2 期望值、變異數、標準差 3 獨立事件、重複試驗、二項分布
	三角函數	★1 弧度、弧長與扇形面積 2 三角函數的性質與圖形 3 正、餘弦函數的疊合 4 圓的參數式 ★5 複數的幾何意涵 ★6 棣美弗定理、複數的 n 次方根
	極限與函數	1 數列及其極限 ★2 無窮等比級數、循環小數 3 夾擠原理 ★4 函數的極限、連續函數
	多項式函數的微積分	1 微分（導數與切線） ★2 函數圖形的判定 ★3 多項式函數的極值 4 多項式方程式根的性質 5 積分的意義與性質 ★6 微積分基本定理 7 積分的應用

2 105 大學指考數學甲試題分布

題號	題型	命題出處	考試重點（測驗目標）	難易度
1	單選	第一冊第三章　指數與對數函數	對數的運算性質	中偏易
2	單選	選修數學甲（上）第二章　三角函數	廣義的三角函數值	中
3	單選	第三冊第三章　平面向量	向量的內積、餘弦定理	中
4	單選	第一冊第二章　多項式函數	二次方程式的根	中偏易
5	多選	第四冊第二章　空間中的平面與直線	空間中點、線、面的關係	中
6	多選	第四冊第三章　矩陣	平面上的線性變換與二階方陣	中
7	多選	第二冊第一章　數列與級數 選修數學甲（下）第一章　極限與函數	等比數列、數列及其極限	中偏難
A	選填	第二冊第三章　機率 選修數學甲（上）第一章　機率統計 II	條件機率、重複試驗	中
B	選填	第四冊第一章　空間向量	外積、三階行列式	中
C	選填	選修數學甲（上）第二章　三角函數	複數的絕對值	中偏易
D	選填	選修數學甲（上）第一章　機率統計 II	期望值	中偏難
一	計算	第三冊第三章　平面向量	分點公式	中
二	計算	選修數學甲（下）第二章　多項式函數的微積分	多項式函數圖形的描繪、函數的極值、定積分	難

三 結　論

如果大部分程度較好的同學都已經在學測時考上理想的學校，那麼今年數甲的題目，對剩下的同學來說，顯然太難了。

1 大部分的題目都考兩個觀念以上，甚至還有大量的計算，必須是統合能力很好的同學才能拿到分數。預估頂標（65）、前標（50）、均標（35）。

2 試題分布如下：第一冊占 12 分、第二冊占 7 分、第三冊占 15 分、第四冊占 23 分、選修數學甲占 43 分。

F

試題解析

數學甲

家齊女中．黃峻棋 老師

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 76 分）

一、單選題（占 24 分）

說明：第 1 題至第 4 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1 請問下列選項中哪一個數值 a 會使得 x 的方程式 $\log a-\log x=\log(a-x)$ 有兩相異實數解？

1 $a=1$

2 $a=2$

3 $a=3$

4 $a=4$

5 $a=5$

答案 5

命題出處 第一冊第三章　指數與對數函數

測驗目標 對數的運算性質

難易度 中偏易

類似題 《大滿貫複習講義－數學甲》第 19 頁範例 2

詳解 $\log a-\log x=\log(a-x)$! $\log\dfrac{a}{x}=\log(a-x)$

! $\dfrac{a}{x}=a-x$

! $a=ax-x^2$

$\therefore x^2-ax+a=0$

$\because$方程式有相異兩實根

$\therefore$判別式 $D=a^2-4a>0$! $a(a-4)>0$

$\therefore a>4$ 或 $a<0$

故選 5

2 下列哪一個選項的數值最接近 $\cos(2.6\pi)$？

1 $\sin(2.6\pi)$

2 $\tan(2.6\pi)$

3 $\cot(2.6\pi)$

4 $\sec(2.6\pi)$

5 $\csc(2.6\pi)$

答 案 3

命題出處 選修數學甲（上）第二章　三角函數

測驗目標 廣義的三角函數值

難易度 中

類似題 《大滿貫複習講義－數學甲》第 92 頁範例 2

詳 解 令 $\cos(2.6\pi)=\cos\left(2\pi+\dfrac{3}{5}\pi\right)=\cos\dfrac{3\pi}{5}=\cos108^\circ$

$=-\cos72^\circ=-\sin18^\circ\ (\approx-0.3)$

1 $\sin(2.6\pi)=\sin\dfrac{3\pi}{5}=\sin108^\circ=\sin72^\circ>0\ (\approx0.9)$

2 $\tan(2.6\pi)=\tan108^\circ=-\tan72^\circ=-\dfrac{\sin72^\circ}{\cos72^\circ}=-\dfrac{\sin72^\circ}{\sin18^\circ}<-1$

3 $\cot(2.6\pi)=\cot108^\circ=-\cot72^\circ=-\dfrac{\sin18^\circ}{\sin72^\circ}\ \left(\approx-\dfrac{0.3}{0.9}=-0.3\right)$

4 $\sec(2.6\pi)=\sec108^\circ=-\sec72^\circ=-\dfrac{1}{\cos72^\circ}=-\dfrac{1}{\sin18^\circ}<-1$

5 $\csc(2.6\pi)=\csc108^\circ=\csc72^\circ=\dfrac{1}{\sin72^\circ}>1$

除了 3 的值介於 $-1\sim0$ 之間外，其餘的值均不合

故選 3

【另解】

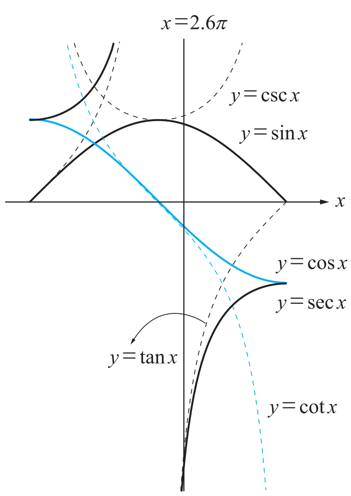
利用圖解如右圖

在 $x=2.6\pi$ 時，

$y=\cot x$ 最接近 $y=\cos x$

即 $\cot(2.6\pi)$ 最接近 $\cos(2.6\pi)$

故選 3



3 假設三角形 ABC 的三邊長分別為 $\overline{AB}=5$、$\overline{BC}=8$、$\overline{AC}=6$。請選出和向量 $\overrightarrow{AB}$ 的內積為最大的選項。

1 $\overrightarrow{AC}$

2 $\overrightarrow{CA}$

3 $\overrightarrow{BC}$

4 $\overrightarrow{CB}$

5 $\overrightarrow{AB}$

答案 4

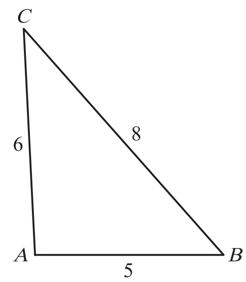
命題出處 第三冊第三章　平面向量

測驗目標 向量的內積、餘弦定理

難易度 中

類似題 《大滿貫複習講義－數學甲》第 43 頁範例 1

詳解 作圖如右



1 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=5\times6\times\cos A$

$$=5\times6\times\frac{5^2+6^2-8^2}{2\times5\times6}=-\frac{3}{2}$$

2 承 1，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}\cdot(-\overrightarrow{AC})=\frac{3}{2}$

3 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

$$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$$

$$=-\frac{3}{2}-25=-\frac{53}{2}$$

4 承 3，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}\cdot(-\overrightarrow{BC})=\frac{53}{2}$

5 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=25$

故選 4

4 假設 a，b 皆為非零實數，且坐標平面上二次函數 $y=ax^2+bx$ 與一次函數 $y=ax+b$ 的圖形相切。請選出切點所在位置為下列哪一個選項。

1 在 x 軸上

2 在 y 軸上

3 在第一象限

4 在第四象限

5 當 $a>0$ 時，在第一象限；當 $a<0$ 時，在第四象限

答案　1

命題出處　第一冊第二章　多項式函數

測驗目標　二次方程式的根

難易度　中偏易

類似題　《大滿貫複習講義－數學甲》第 12 頁範例 4

詳解　$\begin{cases} y=ax^2+bx \\ y=ax+b \end{cases}$ ！ $ax^2+bx=ax+b$ ！ $ax^2+(b-a)x-b=0$

∵圖形相切　∴判別式 $D=(b-a)^2+4ab=0$

！ $b^2+2ab+a^2=0$ ！ $(b+a)^2=0$　∴ $b+a=0$ ！ $b=-a$ 代入原式

∴ $ax^2-2ax+a=0$ ！ $a(x-1)^2=0$　∴ $x=1$，即切點為（1，0）

故選 1

二、多選題（占 24 分）

說明：第 5 題至第 7 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

5　在坐標空間中，點 $P(2,2,1)$ 是平面 E 上距離原點 $O(0,0,0)$ 最近的點。請選出正確的選項。

1 向量 $\vec{v}=(1,-1,0)$ 為平面 E 的法向量

2 點 P 也是平面 E 上距離點（4，4，2）最近的點

3 點（0，0，9）在平面 E 上

4 點（2，2，-8）到平面 E 的距離為 9

5 通過原點和點（2，2，-8）的直線與平面 E 會相交

答案　2 3

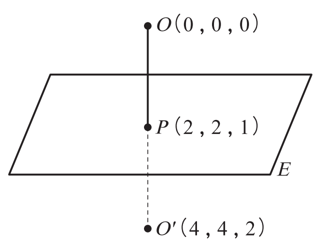
命題出處　第四冊第二章　空間中的平面與直線

測驗目標　空間中點、線、面的關係

難易度　中

類似題　《大滿貫複習講義－數學甲》第 63 頁範例 5

詳解　作圖如右



由題意知 $\overrightarrow{OP}\perp$ 平面 E

∴平面 E 的法向量 $\vec{n}\,/\!/\,\overrightarrow{OP}=(2,2,1)$

1 ×：平面 E 的法向量為（2，2，1）

2 ○：如右圖，

O 對平面 E 的對稱點為 $O'(4,4,2)$，且 $\overline{OP}=\overline{O'P}$

3 ○：承 1 ，平面 E 之方程式為 $2x+2y+z=9$

　∴（0，0，9）在平面 E 上

4 ×：點（2，2，−8）到平面 E 的距離 $d=\dfrac{|4+4-8-9|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\dfrac{9}{3}=3$

5 ×：設 $A(2,2,-8)$，則 $\overrightarrow{OA}=(2,2,-8)$

　∴ OA 直線的方向向量 $\vec{v}=(1,1,-4)$

　又 $\vec{v}\cdot\vec{n}=(1,1,-4)\cdot(2,2,1)=0$

　∴ OA 直線平行平面 E

故選 2 3

6 坐標平面上一矩形，其頂點分別為 $A(3,-2)$、$B(3,2)$、$C(-3,2)$、$D(-3,-2)$。設二階方陣 M 為在坐標平面上定義的線性變換，可將 A 映射到 B 且將 B 映射到 C 。請選出正確的選項。

1 M 定義的線性變換是鏡射變換

2 $M\begin{bmatrix}3 & 3\\ -2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -3\\ 2 & 2\end{bmatrix}$

3 M 定義的線性變換將 C 映射到 D 且將 D 映射到 A

4 M 的行列式值為 -1

5 $M^3=-M$

答　案　2 3 5

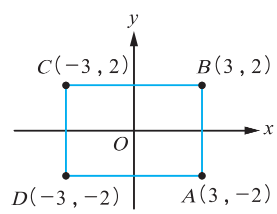
命題出處　第四冊第三章　矩陣

測驗目標　平面上的線性變換與二階方陣

難易度　中

類似題　《大滿貫複習講義－數學甲》第 74 頁範例 5

詳　解　設 $M=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$，$A=\begin{bmatrix}3\\ -2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}-3\\ 2\end{bmatrix}$



由題意知，$MA=B$，$MB=C$

! $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}$ 且 $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\ 2\end{bmatrix}$

$\therefore\begin{cases}3a-2b=3\\ 3c-2d=2\end{cases}$ 且 $\begin{cases}3a+2b=-3\\ 3c+2d=2\end{cases}$

$\therefore a=0$，$b=-\dfrac{3}{2}$，$c=\dfrac{2}{3}$，$d=0$，即 $M=\begin{bmatrix}0 & -\dfrac{3}{2}\\ \dfrac{2}{3} & 0\end{bmatrix}$

1 ×：M 為伸縮變換

2 ○：$M\begin{bmatrix}3&3\\-2&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-\frac{3}{2}\\\frac{2}{3}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&3\\-2&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-3\\2&2\end{bmatrix}$

3 ○：$\begin{bmatrix}0&-\frac{3}{2}\\\frac{2}{3}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\-2\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0&-\frac{3}{2}\\\frac{2}{3}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$

4 ×：$\det M=1$

5 ○：$M^2=MM=\begin{bmatrix}0&-\frac{3}{2}\\\frac{2}{3}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-\frac{3}{2}\\\frac{2}{3}&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}=-I$

$\therefore M^3=(-I)M=-M$

故選 2 3 5

7 在實數線上，動點 A 從原點開始往正向移動，動點 B 從 8 的位置開始往負向移動。兩個動點每一秒移動一次，已知第一秒 A 、B 移動的距離分別為 1、4，且 A 、B 每次移動的距離分別為其前一次移動距離的 $\frac{1}{2}$ 倍、$\frac{1}{3}$ 倍。令 c_n 為第 n 秒時 A、B 的中點位置。請選出正確選項。

1 $c_1=\frac{5}{2}$

2 $c_2>c_1$

3 數列 $\langle c_{n+1}-c_n\rangle$ 是一個等比數列

4 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=2$

5 $c_{1000}>2$

答 案 1 4

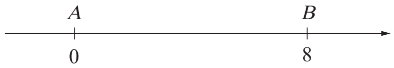
命題出處 第二冊第一章　數列與級數、選修數學甲（下）第一章　極限與函數

測驗目標 等比數列、數列及其極限

難 易 度 中偏難

類 似 題 《大滿貫複習講義－數學甲》第 119 頁範例 3

詳 解



設 A_n、B_n 為第 n 秒時 A、B 的位置

第 1 秒 $A_1=1$，$B_1=4$ $\quad\therefore c_1=\dfrac{5}{2}$

第 2 秒 $A_2=\dfrac{3}{2}$，$B_2=\dfrac{8}{3}$ $\quad\therefore c_2=\dfrac{25}{12}$

第 3 秒 $A_3=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{4}$

$B_3=4-\dfrac{4}{3}-\dfrac{4}{9}=\dfrac{20}{9}$ $\quad\therefore c_3=\dfrac{143}{72}$

同理 $A_4=\dfrac{15}{8}$，$B_4=\dfrac{56}{27}$ $\quad\therefore c_4=\dfrac{853}{432}$

1 ○：$c_1=\dfrac{5}{2}$

2 ×：$c_2<c_1$

3 ×：$c_2-c_1=-\dfrac{5}{12}$，$c_3-c_2=-\dfrac{7}{72}$，$c_4-c_3=-\dfrac{5}{432}$

$\therefore\langle c_{n+1}-c_n\rangle$ 不是等比數列

4 ○：$A_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}=\dfrac{1\cdot\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\dfrac{1}{2}}=2\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$

$$B_n=4-\frac{4}{3}-\frac{4}{9}-\frac{4}{27}-\cdots\cdots-\frac{4}{3^{n-1}}$$

$$=4-4\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$$

$$=4-4\times\frac{\frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)}{1-\frac{1}{3}}$$

$$=4-2\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$$

$\therefore c_n=\dfrac{1}{2}(A_n+B_n)$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}c_n=\dfrac{1}{2}(2+2)=2$

5 ×：承 4，$c_{1000}<2$

故選1 4

三、選填題（占 28 分）

說明：1 第 A. 至 D. 題，請將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（8 ～ 21）。
2 每題完全答對給 7 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 投擲一枚均勻銅板 8 次。在最初兩次的投擲中曾經出現過正面的條件下，8 次投擲中恰好出現 3 次正面的條件機率為 $\dfrac{⑧}{⑨⑩}$。（化成最簡分數）

答案 $\dfrac{3}{16}$

命題出處 第二冊第三章　機率、選修數學甲（上）第一章　機率統計 II

測驗目標 條件機率、重複試驗

難易度 中

類似題 《大滿貫複習講義－數學甲》第 86 頁範例 5

詳解 設 A 表前兩次至少出現一次正面的事件
B 表 8 次投擲恰好出現 3 次正面的事件

$$P(A)=C^2_1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1+C^2_2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$P(A\cap B)$

$$=\underbrace{C^2_1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)}_{\text{前 2 次 1 正 1 反}}\cdot\underbrace{C^6_2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4}_{\text{後 6 次 2 正 4 反}}+\underbrace{C^2_2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}_{\text{前 2 次 2 正}}\cdot\underbrace{C^6_1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5}_{\text{後 6 次 1 正 5 反}}$$

$$=\frac{30}{256}+\frac{6}{256}=\frac{36}{256}=\frac{9}{64}$$

$$\therefore P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{9}{64}}{\frac{3}{4}}=\frac{3}{16}$$

B. 設 $\vec{u}=(1,2,3)$、$\vec{v}=(1,0,-1)$、$\vec{w}=(x,y,z)$ 為空間中三個向量，且向量 $\vec{w}$ 與向量 $\vec{u}\times\vec{v}$ 平行。若行列式 $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -1\\ x & y & z\end{vmatrix}=-12$，則 $\vec{w}=($ ⑪ , ⑫⑬ , ⑭ $)$。

答 案 （1，−2，1）

命題出處 第四冊第一章 空間向量

測驗目標 外積、三階行列式

難易度 中

類似題 《大滿貫複習講義－數學甲》第 48 頁範例 1、第 59 頁範例 2

詳 解 $\vec{u}=(1,2,3)$，$\vec{v}=(1,0,-1)$! $\vec{u}\times\vec{v}=(-2,4,-2)$

$\because\ \vec{w}\,/\!/\,(\vec{u}\times\vec{v})\quad \therefore\ (x,y,z)\,/\!/\,(-2,4,-2)$

! $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{-2}$，令 $x=t$，$y=-2t$，$z=t$

$$\therefore\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -1\\ t & -2t & t\end{vmatrix}=0-6t-2t-0-2t-2t=-12$$

$\therefore\ -12t=-12$! $t=1$

$\therefore\ \vec{w}=(1,-2,1)$

C. 在所有滿足 $z-\bar{z}=-3i$ 的複數 z 中（其中 $\bar{z}$ 為 z 的共軛複數，$i=\sqrt{-1}$），$\left|\sqrt{7}+8i-z\right|$ 的最小值為 $\dfrac{\text{t y}}{\text{u}}$。（化成最簡分數）

答 案 $\dfrac{19}{2}$

命題出處 選修數學甲（上）第二章 三角函數

測驗目標 複數的絕對值

難易度 中偏易

類似題 《大滿貫複習講義－數學甲》第 108 頁範例 14

詳 解 令 $z=a+bi$，a，b 為實數

$\therefore\ \bar{z}=a-bi$

! $z-\bar{z}=2bi=-3i\quad \therefore\ b=-\dfrac{3}{2}$

即 $z=a-\dfrac{3}{2}i$

又 $\left|\sqrt{7}+8i-z\right|=\left|\sqrt{7}+8i-a+\dfrac{3}{2}i\right|=\left|(\sqrt{7}-a)+\dfrac{19}{2}i\right|$

$$=\sqrt{(\sqrt{7}-a)^2+\left(\frac{19}{2}\right)^2}$$

$\therefore$當 $a=\sqrt{7}$ 時，有最小值 $\dfrac{19}{2}$

D. 一圓盤分成標有數字 0、1 的兩區域，且圓盤上有一可轉動的指針。已知每次轉動指針後，前後兩次指針停在同一區域的機率為 $\frac{1}{4}$，而停在不同區域的機率為 $\frac{3}{4}$。遊戲規則為連續轉動指針三次，計算指針在這三次所停區域的標號數字之和。若遊戲前指針的位置停在標號數字為 1 的區域，則此遊戲的期望值為 $\frac{\text{i o}}{\text{p a}}$。（化成最簡分數）

答案 $\frac{21}{16}$

命題出處 選修數學甲（上）第一章　機率統計II

測驗目標 期望值

難易度 中偏難

類似題 《大滿貫複習講義－數學甲》第 81 頁範例 1

詳解 1 轉動三次都是 1：$\left(\frac{1}{4}\right)^3\times3=\frac{3}{64}$

2 三次分別為 1　1　0：$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times2=\frac{6}{64}$

1　0　1：$\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times2=\frac{18}{64}$

0　1　1：$\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times2=\frac{18}{64}$

3 三次分別為 1　0　0：$\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times1=\frac{3}{64}$

0　1　0：$\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times1=\frac{27}{64}$

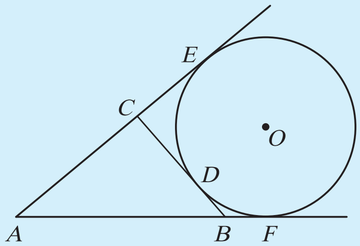
0　0　1：$\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times1=\frac{9}{64}$

∴期望值為 $\frac{84}{64}=\frac{21}{16}$

第貳部分：非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（1、2、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標於題末。

一、如圖，已知圓 O 與直線 BC、直線 AC、直線 AB 均相切，且分別相切於 D、E、F。又 $\overline{BC}=4$，$\overline{AC}=5$，$\overline{AB}=6$。



1 假設 $\overline{BF}=x$，試利用 x 分別表示 $\overline{BD}$，$\overline{CD}$ 以及 $\overline{AE}$，並求出 x 之值。（4 分）

2 若將 $\overrightarrow{AD}$ 表示成 $\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，則 α，β 之值為何？（5 分）

答　案 1 $\overline{BD}=x$，$\overline{CD}=4-x$，$\overline{AE}=9-x$，$x=\frac{3}{2}$；2 $\alpha=\frac{5}{8}$，$\beta=\frac{3}{8}$

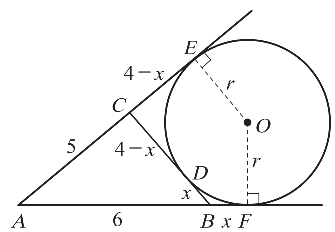
命題出處 第三冊第三章　平面向量

測驗目標 分點公式

難 易 度 中

類 似 題 《大滿貫複習講義－數學甲》課後練習簿第 6 回第 2 題

詳　解 1 如右圖



$\because \overline{BF}=x$

$\therefore \overline{BD}=x$，$\overline{CD}=4-x$，$\overline{CE}=4-x$

$\therefore \overline{AE}=9-x$

$\overline{AO}^2=(6+x)^2+r^2=(9-x)^2+r^2$

! $36+12x+x^2+r^2=81-18x+x^2+r^2$

$\therefore 30x=45$，$x=\frac{3}{2}$

2 $\because x=\frac{3}{2}$　$\therefore \overline{BD}=\frac{3}{2}$，$\overline{CD}=4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$

$\therefore \overline{BD}:\overline{CD}=3:5$

由分點公式得 $\overrightarrow{AD}=\frac{5}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{8}\overrightarrow{AC}$，故 $\alpha=\frac{5}{8}$，$\beta=\frac{3}{8}$

二、設三次實係數多項式 $f(x)$ 的最高次項係數為 a。已知在 $0\leq x\leq 3$ 的範圍中，$f(x)$ 的最大值 12 發生在 $x=0$，$x=2$ 兩處。另一多項式 $G(x)$ 滿足 $G(0)=0$，以及對任意實數 s，$r(s\leq r)$，$\int_s^r f(t)\,dt=G(r)-G(s)$ 恆成立，且函數 $y=G(x)$ 在 $x=1$ 處有（相對）極值。

1 試描繪 $y=f(x)$ 在 $0\leq x\leq 3$ 的範圍中可能的圖形，在圖上標示 $(0, f(0))$、$(2, f(2))$，並由此說明 a 為正或負。（4 分）

2 試求方程式 $f(x)-12=0$ 的實數解（如有重根須標示），並利用 $y=G(x)$ 在 $x=1$ 處有極值，求 a 之值。（5 分）

3 在 $0\leq x\leq 2$ 的範圍中，求 $G(x)$ 之最小值。（6 分）

答　案　1　圖略，$a<0$；2　實根為 0，2（2 為重根）；$a=-12$；3　0

命題出處　選修數學甲（下）第二章　多項式函數的微積分

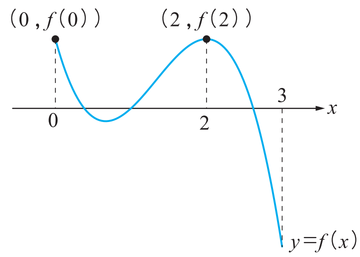
測驗目標　多項式函數圖形的描繪、函數的極值、定積分

難易度　難

類似題　《大滿貫複習講義－數學甲》第 143 頁範例 8、第 145 頁範例 9、第 156 頁範例 18

詳　解　1　$\because f(x)$ 為三次多項式，且 $f(x)$ 的最大值 12 發生在 $x=0$，$x=2$ 處

$\therefore f(x)$ 的簡圖如右



且 $f(0)=f(2)=12$

由圖可知 $a<0$

2　$f(x)-12=0$ 的實根，即 $y=f(x)$

與 $y=12$ 之圖形交點的 x 坐標

$\therefore$實根為 0，2（2 為重根）

令 $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，$0\leq x\leq 3$

! $f(0)=d=12$，又 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$，$f'(2)=0$

$\therefore 12a+4b+c=0$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 1

$f(2)=12$　$\therefore 8a+4b+2c+12=12$! $4a+2b+c=0$$\cdots\cdots$ 2

由 1 － 2 得 $8a+2b=0$! $b=-4a$　$\therefore c=4a$

$\therefore f(x)=a(x^3-4x^2+4x)+12$

又 $\int_s^r f(t)\,dt=G(r)-G(s)$，即 $G(x)$ 為 $f(x)$ 的反導函數

$\therefore G(x)=a\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+2x^2\right)+12x+c$，$c$ 為常數

$\because G(x)$ 在 $x=1$ 處有極值　$\therefore G'(1)=0$

$\therefore G'(x)=a(x^3-4x^2+4x)+12$，$G'(1)=a+12=0$　$\therefore a=-12$

3　承 2 ，由 $G(0)=0$，可推得 $c=0$

即 $G(x)=-3x^4+16x^3-24x^2+12x$，$0\leq x\leq 2$

$G'(x)=-12x^3+48x^2-48x+12$，令 $G'(x)=0$

$\therefore x^3-4x^2+4x-1=0$! $(x-1)(x^2-3x+1)=0$

$\therefore x=1$ 或 $\frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$（正不合）

$\therefore$

x	0	…	$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$	…	1	…	2
$G'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$G(x)$	↗			↘		↗	
			極小值		極小值		

$G(0)=0$，$G(1)=1$　$\therefore G(x)$ 的最小值為 0