103 指考

精彩解析

數學考科

北門高中 / 朱漢民 老師
臺南女中 / 洪士薰 老師

【試題 · 答案】依據大考中心公布內容

發行人 / 陳炳亨
總召集 / 周耀琨
總編輯 / 蔣海燕
主　編 / 王維芬
校　對 / 黃秉璿 · 黃閔謙 · 李毓珊 · 羅蔣偉
美　編 / 李懿娟 · 杜政賢

出　版 / 民國一○三年七月
發行所 / 7 0 2 4 8 臺南市新樂路 76 號
編輯部 / 7 0 2 5 2 臺南市新忠路 8-1 號
電　話 / (06) 2619621#314
E-mail / periodical@hanlin.com.tw
翰林我的網 http://www.worldone.com.tw

NO.00843
4 716413 008439 23
翰林出版

本書內容同步刊載於翰林我的網

翰林 103指考 數學甲 試題分析

北門高中 ｜ 朱漢民 老師

一 大考中心公布的 99 課綱數甲考科測驗範圍大綱：

高一數學：數與式、多項式函數、指數與對數函數、機率。

高二數學：三角、直線與圓、平面向量、空間向量、空間中的平面與直線、矩陣。

選修科目數學甲：機率統計 II、三角函數、極限與函數、多項式函數的微積分。

二 各單元占分：

題號	題型	出處	內容	配分
1	單選題	第三冊第二章	直線與圓	6
2	單選題	選修數學甲（上）第二章	三角函數	6
3	單選題	第一冊第三章	指數與對數函數	6
4	單選題	第一冊第二章 選修數學甲（下）第一章	多項式函數 極限與函數	6
5	多選題	第四冊第一章	空間向量	8
6	多選題	選修數學甲（上）第二章 選修數學甲（下）第二章	三角函數 多項式函數的微積分	8
7	多選題	選修數學甲（上）第一章	機率統計 II	8
8	多選題	第一冊第三章 第四冊第三章	指數與對數函數 矩陣	8
9	多選題	第三冊第一章	三角	8
A	選填題	第四冊第一章	空間向量	6
B	選填題	第二冊第三章	機率	6
一	非選題	選修數學甲（下）第二章	多項式函數的微積分	10
二	非選題	第四冊第三章	矩陣	14

註 各單元占分補充說明：若同一題由兩個單元綜合出題，則算一半題分

冊別	配分	說明
第一冊	13	雖然第一章“數與式”並未列入上表，但是在解第 1 題時需要有絕對值的基本概念。
第二冊	6	本冊配分特別少是因為本冊只有一章“機率”被列為主要出題範圍。
第三冊	14	三角考比較少是因為選修數學甲要考三角函數。
第四冊	32	本冊配分較多是因為除了第 8 題考了矩陣以外，非選二也考了矩陣。雖然第四冊第二章“空間中的平面與直線”並未列入上表，但是具備該章節的概念將有助於解第 8 題的第(5)個選項。
選修數學甲（上）	18	選修數學甲總共占了 35 分，相當合適，但三角函數沒有考疊合比較可惜。
選修數學甲（下）	17	

三 試題特色：

1 創新題型多且漂亮

要自創一個題型已屬不易，還要能出得漂亮，並讓計算量適中，考出鑑別度，更屬不易！例如：第 2、3、4 題；第 6 題的第(4)、(5)兩個選項；第 7 題的第(4)、(5)兩個選項；第 8 題；非選第二題。分析如下：

① 第 2 題考三角函數的定義，並巧妙結合了三角測量跟等差數列。

② 第 3 題雖然要取兩次 log 才能算出答案，但是出題者很細心設計數字讓我們可以估算！不懂得估算的同學，會在此題浪費些許時間。要注意，近幾年的升學考題，估算這個動作不斷在歷屆題目中出現！

③ 第 4 題雖然很難，但確可以考出真正頂尖的學生！若沒有抓到問題核心的同學會在此題浪費不少時間。試題表面上是求餘式的常數項，但真正能寫出來的只有商式；因為被除式跟除式次數相同，所以**商式只好是常數**，這麼一來不難看出：

$$2(x+1)^n=(3x-2)^n\times\frac{2}{3^n}+r_n(x)\text{，故 } r_n=r_n(0)=2-2\times\frac{(-2)^n}{3^n}\xrightarrow{(n\to\infty)}2$$

此題的確有難度，但是漂亮，考得出學生對數學的成熟度。筆者這兩天看媒體報導，許多老師以為難在計算量大，但此題計算量真的大嗎？其實不然，真正困難的是難在看出問題的核心！

④ 第 6 題的第(4)個選項把 π 估算為 3（這不就是小學教的圓周率嗎！）即可輕鬆得到答案！

第 6 題的第(5)個選項有兩個關鍵，其一是能看出 $f(0)$ 剛好等於 0，其二，要能看出 $\cos\frac{4\pi}{7}$ 略小於 $\cos\frac{4\pi}{8}=\cos\frac{\pi}{2}=0$，此選項不可以硬算。這些細節藏得巧妙，同時也在測驗考生的程度！

⑤ 第 7 題的第(4)、(5)兩個選項根本不用算，再次重申，**要抓住問題的核心**。

第(4)個選項：$p=\frac{1}{2}$ 表示兩隊旗鼓相當，打得難分難解，故須最多的場數來決定晉級的隊伍。

第(5)個選項：首先，要看出 $f\left(\frac{4}{5}\right)=f\left(\frac{1}{5}\right)$，而 $0<\frac{1}{5}<\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$；這表示當 $p=\frac{1}{4}$ 的時候，雖然甲隊的實力不如乙隊，但比 $p=\frac{1}{5}$ 時，有多一點的競爭力，能“多掙扎幾場”，故 $f\left(\frac{1}{5}\right)<f\left(\frac{1}{4}\right)$，即 $f\left(\frac{1}{4}\right)>f\left(\frac{4}{5}\right)$。筆者常跟自己的學生講：**數學不是只有加減乘除等計算，真的懂數學的人，是能用語言、文字來表達一件事情**。未來的考生要特別注意此點！

⑥ 第 8 題雖然一開始要經過一個變數代換的動作，但是之後用矩陣的列運算做起來輕鬆寫意。**千萬別用克拉瑪公式來解此題，否則會陷入可怕的計算中！**

⑦ 非選的第二大題的第(3)小題：如果考生用硬算來推導結果必定要花費許多時間。我們應該將該平面變換矩陣寫為兩個基本變換矩陣（旋轉矩陣及伸縮矩陣）的乘積，再加以論證，此舉會遠比用純計算的手法來證明更省時。

2 基本題與難題落差過大，中等難度題目太少

一般程度考生很可能僅能作答出第 1 題；第 5 ～ 9 題的前一兩個選項；第 A 題；非選第一大題第(1)小題以及非選第二大題的第(1)小題。其餘幾乎都要具有相當的數學成熟度才能解出。這對中段學生而言是相當不利的！也因為如此，可能使得部分學生在多選題用猜的，而導致反鑑別的現象出現！

3 少數創新試題略具計算技巧或略顯刁鑽

例如：第 5 題的第(3)、(4)兩個選項僅是抽象的代數操作。

第 9 題的第(4)個選項是個陷阱，此選項略為刁鑽。

翰林 103 指考 數學甲 試題解析

臺南女中 ｜ 洪士薰 老師

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 76 分）

一、單選題（占 24 分）

說明：第 1. 題至第 4. 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

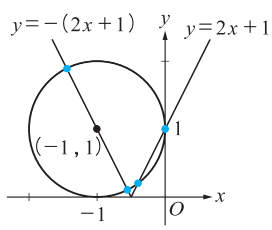
1. 在坐標平面上，圓 $x^2+y^2+2x-2y+1=0$ 與 $y=|2x+1|$ 的圖形有幾個交點？
(1) 1 個　(2) 2 個　(3) 3 個　(4) 4 個　(5) 0 個

答案 (4)

命題出處 第三冊第二章　直線與圓

測驗目標 圓標準式、圓與直線的關係

詳解 作 $(x+1)^2+(y-1)^2=1$，$y=|2x+1|$ 的圖形如右



共有 4 個交點

故選(4)

2. 在地面某定點測得數公里外高塔塔尖的仰角為 θ_1，朝高塔方向沿直線前進 100 公尺之後，重新測得塔尖仰角為 θ_2，再沿同一直線繼續前進 100 公尺後，測得仰角為 θ_3。請問下列哪一個選項的數值依序成等差數列？

(1) θ_1，θ_2，θ_3

(2) $\sin\theta_1$，$\sin\theta_2$，$\sin\theta_3$

(3) $\cos\theta_1$，$\cos\theta_2$，$\cos\theta_3$

(4) $\tan\theta_1$，$\tan\theta_2$，$\tan\theta_3$

(5) $\cot\theta_1$，$\cot\theta_2$，$\cot\theta_3$

答案 (5)

命題出處 選修數學甲（上）第二章　三角函數

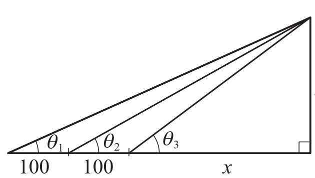
測驗目標 三角測量

詳解 設自定點至塔底距離為 $x+200$ 公尺，塔高為 h 公尺

因此 $\dfrac{h}{x}=\tan\theta_3$，

$\dfrac{h}{x+100}=\tan\theta_2$，

$\dfrac{h}{x+200}=\tan\theta_1$



化成 $x=h\cot\theta_3$，

$x+100=h\cot\theta_2$，

$x+200=h\cot\theta_1$，

故 $h\cot\theta_2-h\cot\theta_3=100=h\cot\theta_1-h\cot\theta_2$

所以 $\cot\theta_1$，$\cot\theta_2$，$\cot\theta_3$ 成等差數列

故選(5)

3. 請問指數方程式 $2^{10^x}=10^6$ 的解 x 最接近下列哪一個選項？
（$\log 2\approx 0.3010$、$\log 3\approx 0.4771$、$\log 7\approx 0.8451$）
(1) 1.1　(2) 1.2　(3) 1.3　(4) 1.4　(5) 1.5

答案　(3)

命題出處　第一冊第三章　指數與對數函數

測驗目標　指數方程式、指數與對數的應用

詳解　原式左右同取 log，得 $10^x\log 2=6$

因此 $10^x\approx\dfrac{6}{0.3010}\approx 20$，

再取 log 值，得 $x\approx\log 20\approx 1.3010$

故選(3)

4. 令多項式 $2(x+1)^n$ 除以 $(3x-2)^n$ 所得餘式的常數項為 r_n。請問極限 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n$ 為下列哪一選項？
(1) 0　(2) $\dfrac{3}{2}$　(3) 2　(4) 3　(5)不存在

答案　(3)

命題出處　第一冊第二章　多項式函數、選修數學甲（下）第一章　極限與函數

測驗目標　多項式除法、除法原理、餘式定理、數列的極限

詳解　若 $2(x+1)^n$ 除以 $(3x-2)^n$ 所得餘式為 $R(x)$

比較除式、被除式的 x^n 項係數，得

$$2(x+1)^n=\frac{2}{3^n}(3x-2)^n+R(x)$$

$$\therefore R(x)=2(x+1)^n-\frac{2}{3^n}(3x-2)^n$$

$$\therefore r_n=R(0)=2-\frac{2}{3^n}(-2)^n$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} r_n=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{2}{3^n}(-2)^n\right)=2$$

故選(3)

二、多選題（占 40 分）

說明：第 5. 題至第 9. 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

5. 給定向量 $\overrightarrow{u}=(2,2,1)$，請選出正確的選項：
(1)可找到向量 $\overrightarrow{v}$ 使得 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\sqrt{2}$
(2)可找到向量 $\overrightarrow{v}$ 使得 $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=(1,3,4)$
(3)若非零向量 $\overrightarrow{v}$ 滿足 $|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}|=2|\overrightarrow{v}|$，則 $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$
(4)若非零向量 $\overrightarrow{v}$ 滿足 $|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}|=3|\overrightarrow{v}|$，則 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$
(5)若向量 $\overrightarrow{v}$ 滿足 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$ 且 $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$，則 $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$

答案 (1)(4)(5)

命題出處 第四冊第一章　空間向量

測驗目標 內積、外積及內積與外積的關係

詳解 $|\overrightarrow{u}|=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$

(1)○：$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\cos\theta \Rightarrow 3|\overrightarrow{v}|\cos\theta=\sqrt{2}$，有解

(2)×：$(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})\perp\overrightarrow{u}$，但 $(2,2,1)\cdot(1,3,4)\neq 0$

(3)×：$|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}|^2+(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})^2=|\overrightarrow{u}|^2|\overrightarrow{v}|^2=9|\overrightarrow{v}|^2$

$|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}|^2+4|\overrightarrow{v}|^2=9|\overrightarrow{v}|^2 \Rightarrow |\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}|^2=5|\overrightarrow{v}|^2$

$\therefore \overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\neq\overrightarrow{0}$

(4)○：$9|\overrightarrow{v}|^2+(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})^2=9|\overrightarrow{v}|^2 \Rightarrow (\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})^2=0 \Rightarrow \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$

(5)○：$0+0=9|\overrightarrow{v}|^2 \Rightarrow |\overrightarrow{v}|=0 \Rightarrow \overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$

故選(1)(4)(5)

6. 考慮多項式函數 $f(x)=4x^3-11x^2+6x$。請選出正確的選項：
(1)函數 f 的圖形在點 $(1,-1)$ 的切線斜率為正
(2)函數 f 的圖形與直線 $y=1$ 交於三點
(3)函數 f 的唯一相對極小值為 $\dfrac{-9}{4}$
(4) $f(\pi)>0$
(5) $f\left(\cos\dfrac{4\pi}{7}\right)>0$

答案 (3)(4)

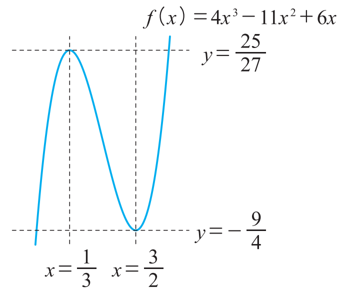
命題出處 選修數學甲（下）第二章　多項式函數的微積分

測驗目標 三次多項式的繪圖

詳解 (1)×：$f'(x)=12x^2-22x+6$，所以 $f'(1)=12-22+6=-4<0$

(2)×：$f'(x)=12x^2-22x+6=2(3x-1)(2x-3)$，

故 $f(x)$ 圖形如右



$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{25}{27}$，$f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{4}$

故 $y=f(x)$ 與 $y=1$ 僅有一交點

(3)○：由(2)知 $f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{4}$ 是唯一相對極小值

(4)○：$f(x)$ 在區間 $\left(\frac{3}{2},\infty\right)$ 遞增，

故 $f(\pi)>f(3)=27>0$

(5)×：$\cos\frac{4\pi}{7}<0$，$f(x)$ 在區間 $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$ 遞增，

故 $f\left(\cos\frac{4\pi}{7}\right)<f(0)=0$

故選(3)(4)

7. 職業棒球季後賽第一輪採五戰三勝制，當參賽甲、乙兩隊中有一隊贏得三場比賽時，就由該隊晉級而賽事結束。每場比賽皆須分出勝負，且每場比賽的勝負皆不受之前已賽結果影響。假設甲隊在任一場贏球的機率為定值 p，以 $f(p)$ 表實際比賽場數的期望值（其中 $0\le p\le 1$），請選出正確的選項：

(1)只須比賽 3 場就產生晉級球隊的機率為 $p^3+(1-p)^3$

(2) $f(p)$ 是 p 的 5 次多項式

(3) $f(p)$ 的常數項等於 3

(4)函數 $f(p)$ 在 $p=\frac{1}{2}$ 時有最大值

(5) $f\left(\frac{1}{4}\right)<f\left(\frac{4}{5}\right)$

答案 (1)(3)(4)

命題出處 第一冊第二章　多項式函數、第二冊第三章　機率、選修數學甲（上）第一章　機率統計II

測驗目標 獨立事件、期望值、多項式的極值

詳解 (1)○：3 場晉級可能為 $\begin{cases}\text{甲連勝 3 場：}p^3\\ \text{乙連勝 3 場：}(1-p)^3\end{cases}$

故機率為 $p^3+(1-p)^3$

(2)×：4 場晉級可能為（“＋”表甲勝，“－”表乙勝）

$$\left.\begin{array}{l}++-\\+-+\\-++\end{array}\right\}+：3\cdot p^3(1-p)$$

或

$$\left.\begin{array}{l}+--\\-+-\\--+\end{array}\right\}-：3\cdot(1-p)^3p$$

機率為 $3(p^3(1-p)+(1-p)^3p)$

令 $A(p)=p^3+(1-p)^3$，$B(p)=p^3(1-p)+(1-p)^3p$，

則 5 場晉級的機率為 $1-A(p)-3B(p)$

故 $f(p)=3\cdot A(p)+4\cdot 3B(p)+5\cdot(1-A(p)-3B(p))$

$\quad=5-2A(p)-3B(p)$

$\deg A(p)=2$，$\deg B(p)=4$，故 $f(p)$ 最多為 4 次多項式

(3)○：$f(0)=5-2A(0)-3B(0)=5-2-0=3$

(4)○：$A'(p)=3p^2+3(1-p)^2(-1)=3(2p-1)$

$B'(p)=3p^2(1-p)-p^3-3p(1-p)^2+(1-p)^3$

$\quad=3p(1-p)(2p-1)-(p^3-(1-p)^3)$

$\quad=3p(1-p)(2p-1)-(2p-1)(p^2+p(1-p)+(1-p)^2)$

$\quad=-(2p-1)^3$

故 $f'(p)=-6(2p-1)+3(2p-1)^3=3(2p-1)((2p-1)^2-2)$

因為 $0\leq p\leq 1 \Rightarrow (2p-1)^2-2<0$

所以 $f(p)$ 在區間 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 遞增；在區間 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 遞減

故 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ 為最大值

(5)×：考慮 $f(p)=f(1-p)$，$f\left(\dfrac{4}{5}\right)=f\left(\dfrac{1}{5}\right)$，

$\because f\left(\dfrac{1}{5}\right)<f\left(\dfrac{1}{4}\right) \quad \therefore f\left(\dfrac{4}{5}\right)<f\left(\dfrac{1}{4}\right)$

註：其實選項(4)(5)可以猜，當 $p=\dfrac{1}{2}$ 時，表示兩隊實力相當，競爭最激烈，則比賽場次最多（$f(p)$ 最大），可知(4)對；

再者，當 p 愈接近 $\dfrac{1}{2}$ 時，競爭愈激烈，則比賽場次也愈多（$f(p)$ 愈大），故由 $f(p)=f(1-p)$，即可知(5)錯。

故選(1)(3)(4)

8. 考慮 x，y，z 的方程組 $\begin{cases} 2^x-3^y+5^z=-1 \\ 2^{x+1}+3^y-5^z=4 \\ 2^{x+1}+3^{y+1}+a5^z=8 \end{cases}$，其中 a 為實數。請選出正確的選項：

(1)若（x，y，z）為此方程組的解，則 $x=0$
(2)若（x，y，z）為此方程組的解，則 $y>0$
(3)若（x，y，z）為此方程組的解，則 $y<z$
(4)當 $a\neq-3$ 時，恰有一組（x，y，z）滿足此方程組
(5)當 $a=-3$ 時，滿足此方程組的所有解（x，y，z）會在一條直線上

答　案 (1)(2)

命題出處 第一冊第三章　指數與對數函數、第四冊第二章　空間中的平面與直線

測驗目標 指數方程式、三元一次方程組

詳　解 令 $u=2^x$，$v=3^y$，$w=5^z$，則原式可寫為 $\begin{cases} u-v+w=-1 \\ 2u+v-w=4 \\ 2u+3v+aw=8 \end{cases}$，

其增廣矩陣為 $\left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & a & 8 \end{array}\right]$ $\times(-2)$ $\times(-2)$

$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 5 & a-2 & 10 \end{array}\right] \times\left(\frac{1}{3}\right) \rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & a-2 & 10 \end{array}\right]$ $\times1$ $\times(-5)$

$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & a+3 & 0 \end{array}\right]$，故原式可化簡為 $\begin{cases} 2^x=1 \\ 3^y-5^z=2 \\ (a+3)5^z=0 \end{cases}$

(1)○(2)○(3)×：若有解，則 $\begin{cases} 2^x=1=2^0 \\ 3^y-5^z=2 \end{cases}$ ⇨ $\begin{cases} x=0 \\ 3^y=5^z+2 \end{cases}$

① $x=0$ ⇨ (1)○
② $3^y=5^z+2>1=3^0$ ⇨ $y>0$ ⇨ (2)○
③ 若 $y<z$，則 $3^y<3^z\leq5^z<5^z+2$（不合）⇨ (3)×

(4)×：$a\neq-3$ 時，$a+3\neq0$ ⇨ $5^z=0$（無解）

(5)×：$a=-3$ 時，原式為 $\begin{cases} 2^x=1 \\ 3^y=5^z+2 \end{cases}$

取 $z=t$，則解為 $\begin{cases} x=0 \\ y=\log_3(5^t+2) \\ z=t \end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$

其圖形不是直線

故選(1)(2)

【另解】

(1)○：$\begin{cases} 2^x-3^y+5^z=-1 \cdots\cdots\cdots ① \\ 2^{x+1}+3^y-5^z=4 \cdots\cdots\cdots ② \\ 2^{x+1}+3^{y+1}+a5^z=8 \cdots\cdots ③ \end{cases}$

①＋②得 $2^x+2^{x+1}=3$

即 $2^x+2\cdot 2^x=3$ ⇨ $2^x=1$，因此 $x=0$

(2)○：$x=0$ 代入②得 $2+3^y-5^z=4$ ⇨ $3^y=2+5^z>2>3^0$

所以 $y>0$

(3)×：考慮 $y=1$，$z=0$ 是 $3^y=2+5^z$ 的解，但 $y>z$

(4)×：將 $x=0$ 代回①、②、③得

$\begin{cases} -3^y+5^z=-2 \cdots\cdots\cdots\cdots ④ \\ 3^y-5^z=2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑤ \\ 3\cdot 3^y+a\cdot 5^z=6 \cdots\cdots\cdots ⑥ \end{cases}$

④、⑤同義

得 $\begin{cases} 3^y-5^z=2 \cdots\cdots\cdots\cdots ⑤ \\ 3\cdot 3^y+a\cdot 5^z=6 \cdots\cdots ⑥ \end{cases}$

$-3\times$⑤＋⑥得 $(a+3)\cdot 5^z=0$

若 $a\neq -3$ ⇨ $5^z=0$ 無解

(5)×：若 $a=-3$，則原方程組解為 $\begin{cases} 3^y-5^z=2 \\ x=0 \end{cases}$，其圖形不為直線

故選(1)(2)

9. 在（凸）四邊形 $ABCD$ 中，已知 $\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=4$，$\overline{CD}=3$，$\overline{DA}=x$，且對角線 $\overline{AC}=4$。請選出正確的選項：

(1) $\cos\angle ABC\geq\dfrac{3}{7}$

(2) $\cos\angle BAD>\cos\angle ABC$

(3) x 可能為 1

(4) $x<\dfrac{13}{2}$

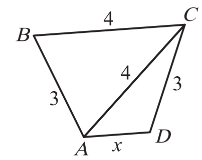
(5)若 A、B、C、D 四點共圓，則 $x=\dfrac{7}{4}$

答　案 (4)(5)

命題出處 第三冊第一章　三角

測驗目標 餘弦定理

詳　解 (1)×：△ABC 中，$\cos\angle ABC=\dfrac{3^2+4^2-4^2}{2\cdot3\cdot4}=\dfrac{3}{8}<\dfrac{3}{7}$



(2)×：$\angle BAD=\angle BAC+\angle CAD>\angle BAC$

又因△ ABC 為等腰三角形，所以 $\angle ABC=\angle BAC$

故 $\angle BAD>\angle ABC$ ⇨ $\cos\angle BAD<\cos\angle ABC$

(3)×：$\overline{AD}+\overline{CD}>\overline{AC}$，故 $x+3>4$ 得 $x>1$

(4)◯：$\angle ACD<180^\circ-\angle ACB$，因此 $\cos\angle ACD>\cos(180^\circ-\angle ACB)$

$\cos\angle ACB=\dfrac{4^2+4^2-3^2}{2\cdot4\cdot4}=\dfrac{23}{32}$，故 $\cos\angle ACD>-\dfrac{23}{32}$

由餘弦定理（考慮 △ACD）

$x^2=3^2+4^2-2\cdot3\cdot4\cdot\cos\angle ACD<25-2\cdot3\cdot4\cdot\left(-\dfrac{23}{32}\right)=\dfrac{169}{4}$

得 $x<\dfrac{13}{2}$

(5)◯：若 A、B、C、D 四點共圓，則

$\angle ABC$ 與 $\angle ADC$ 互補

$\cos\angle ADC=-\cos\angle ABC=-\dfrac{3}{8}$

又 $\cos\angle ADC=\dfrac{x^2+3^2-4^2}{2\cdot x\cdot3}$，解 $\dfrac{x^2+3^2-4^2}{2\cdot x\cdot3}=-\dfrac{3}{8}$

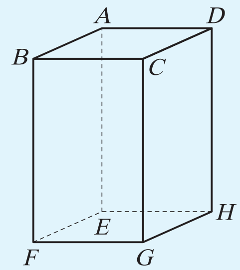
得 $4x^2+9x-28=0$，即 $x=\dfrac{7}{4}$ 或 -4（不合）

故選(4)(5)

三、選填題（占 12 分）

說明：1. 第 A. 與 B. 題，請將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（10 ～ 13）。
2. 每題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 如圖，設 $ABCD-EFGH$ 為空間中長、寬、高分別為 2、3、5 的長方體。已知 $\overline{AB}=2$、$\overline{AD}=\overline{BC}=3$，且 $\overline{DH}=5$，則內積 $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}$ 之值為 ___⑩___ 。



答　案　9

命題出處　第四冊第一章　空間向量

測驗目標　空間向量的內積

詳　解　$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}$

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$

$=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{AD}$

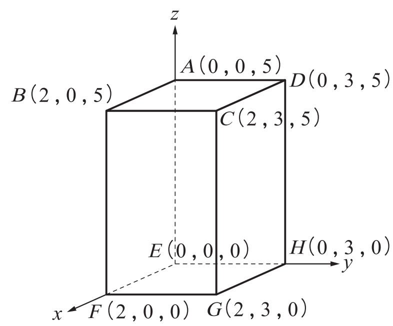
$=0+9+0+0=9$

【另解】

建立坐標系如右圖

$\overrightarrow{AC}=(2,3,0)$，$\overrightarrow{AH}=(0,3,-5)$

故 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}=9$



B. 在遊戲中，阿玲拿到如右的數字卡。主持人隨機從 1 至 9 號球中同時取出三球，若這三球的號碼中任兩個都不在卡片上的同一行也不在卡片上的同一列時就得獎，則阿玲得獎的機率為 $\dfrac{⑪}{⑫⑬}$ 。（化成最簡分數）

1	2	3
8	9	4
7	6	5

答　案　$\dfrac{1}{14}$

命題出處　第二冊第三章　機率

測驗目標　機率的計算

詳　解　每一數字對應一行列位置，例如：$8\longleftrightarrow\overset{\text{列　行}}{(2,1)}$，

因此三個球號的對應位置必為

$(1,a)$，$(2,b)$，$(3,c)$，其中 a，b，c 相異

故機率為 $\dfrac{3!}{C_3^9}=\dfrac{6}{\dfrac{9\cdot8\cdot7}{6}}=\dfrac{1}{14}$

第貳部分：非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至給零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標於題末。

一、在坐標平面上以 Ω 表曲線 $y=x-x^2$ 與直線 $y=0$ 所圍的有界區域。

(1) 試求 Ω 的面積。（3 分）

(2) 若直線 $y=cx$ 將 Ω 分成面積相等的兩塊區域，試求 c 之值。（7 分）

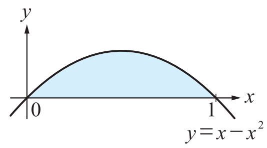
答案 (1) $\dfrac{1}{6}$

(2) $1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

命題出處 選修數學甲（下）第二章　多項式函數的微積分

測驗目標 多項式函數所圍區域的面積

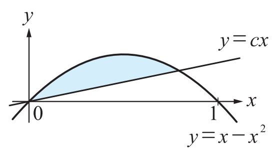
詳解 (1) $\begin{cases} y=x-x^2 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow x(1-x)=0 \Rightarrow x=0$ 或 1



$$\int_0^1 |x-x^2|\,dx=\int_0^1 (x-x^2)\,dx$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

(2) $\begin{cases} y=cx \\ y=x-x^2 \end{cases} \Rightarrow cx=x-x^2$



$\Rightarrow x^2=(1-c)x \Rightarrow x=0$ 或 $(1-c)$

$$\int_0^{1-c}(x-x^2-cx)\,dx=\left(\frac{(1-c)}{2}x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{1-c}$$

$$=\frac{(1-c)^3}{2}-\frac{(1-c)^3}{3}$$

$$=\frac{(1-c)^3}{6}$$

$$\frac{(1-c)^3}{6}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6} \Rightarrow (1-c)^3=\frac{1}{2} \Rightarrow 1-c=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

得 $c=1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

二、對於正整數 n，設（$1+i)^n=a_n+ib_n$，其中 $i=\sqrt{-1}$ 且 a_n、b_n 為實數。

(1) 試求 $a_4^2+b_4^2$ 之值。（2 分）

(2) 從恆等式（$1+i)^{n+1}=(1+i)^n(1+i)$ 可推得 a_n、b_n 會滿足矩陣乘法 $\begin{bmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{bmatrix}=T\begin{bmatrix}a_n\\b_n\end{bmatrix}$，試求矩陣 T。（4 分）

(3) 令 P、Q 為坐標平面上異於原點 O 的兩點，若矩陣 T 在平面上定義的線性變換將 P、Q 分別映射到點 P'、Q'，試證 $\dfrac{\overline{OP'}}{\overline{OP}}=\dfrac{\overline{OQ'}}{\overline{OQ}}$ 且 $\angle POQ=\angle P'OQ'$。（8 分）

答案 (1) 16

(2) $\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$

(3) 略

命題出處 第一冊第二章　多項式函數、第四冊第三章　矩陣

測驗目標 複數的四則運算、平面線性變換、伸縮、旋轉變換

詳解 (1) $a_4^2+b_4^2=|a_4+ib_4|^2=|(1+i)^4|^2=((\sqrt{1+1})^4)^2=2^4=16$

(2) $a_{n+1}+ib_{n+1}=(a_n+ib_n)(1+i)$

$=(a_n-b_n)+i(a_n+b_n)$

得 $a_{n+1}=a_n-b_n$，$b_{n+1}=a_n+b_n$

故 $\begin{bmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\b_n\end{bmatrix}$，

$T=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$

(3) 設 $P(a,b)$，$Q(c,d)$，$\overline{OP}=\sqrt{a^2+b^2}$，$\overline{OQ}=\sqrt{c^2+d^2}$

則 $P'(a',b')$，$Q'(c',d')$ 滿足 $\begin{bmatrix}a'\\b'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a-b\\a+b\end{bmatrix}$，

所以 $\overline{OP'}=\sqrt{a'^2+b'^2}=\sqrt{(a-b)^2+(a+b)^2}=\sqrt{2(a^2+b^2)}$

$\therefore \dfrac{\overline{OP'}}{\overline{OP}}=\dfrac{\sqrt{2(a^2+b^2)}}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{2}$

同理，$\begin{bmatrix}c'\\d'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c-d\\c+d\end{bmatrix}$

得 $\overline{OQ'}=\sqrt{2(c^2+d^2)}$　$\therefore \dfrac{\overline{OQ'}}{\overline{OQ}}=\sqrt{2}$

因此，$\dfrac{\overline{OP'}}{\overline{OP}}=\sqrt{2}=\dfrac{\overline{OQ'}}{\overline{OQ}}$

$$\cos\angle POQ=\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OP}|\cdot|\overrightarrow{OQ}|}=\frac{ac+bd}{\overline{OP}\cdot\overline{OQ}}$$

$$\cos\angle P'OQ'=\frac{\overrightarrow{OP'}\cdot\overrightarrow{OQ'}}{|\overrightarrow{OP'}|\cdot|\overrightarrow{OQ'}|}=\frac{(a-b)(c-d)+(a+b)(c+d)}{2\overline{OP}\cdot\overline{OQ}}$$

$$=\frac{ac-ad-bc+bd+ac+ad+bc+bd}{2\overline{OP}\cdot\overline{OQ}}=\frac{2(ac+bd)}{2\overline{OP}\cdot\overline{OQ}}$$

$$=\cos\angle POQ$$

因此 $\angle POQ=\angle P'OQ'$

【另解】

$$T=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}=\sqrt{2}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

$$=\sqrt{2}\begin{bmatrix}\cos 45^\circ&-\sin 45^\circ\\\sin 45^\circ&\cos 45^\circ\end{bmatrix}\text{（伸縮＋旋轉）}$$

設 $P(r\cos\alpha，r\sin\alpha)$，$Q(s\cos\beta，s\sin\beta)$

$$\Rightarrow T\begin{bmatrix}r\cos\alpha\\r\sin\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}r\cos(\alpha+45^\circ)\\\sqrt{2}r\sin(\alpha+45^\circ)\end{bmatrix},$$

$$T\begin{bmatrix}s\cos\beta\\s\sin\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}s\cos(\beta+45^\circ)\\\sqrt{2}s\sin(\beta+45^\circ)\end{bmatrix}$$

$\therefore P'(\sqrt{2}r\cos(\alpha+45^\circ),\sqrt{2}r\sin(\alpha+45^\circ))$，

$Q'(\sqrt{2}r\cos(\beta+45^\circ),\sqrt{2}r\sin(\beta+45^\circ))$，

$$\therefore\frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}}=\sqrt{2}=\frac{\overline{OQ'}}{\overline{OQ}}$$

$\angle POQ=|\beta-\alpha|$，$\angle P'OQ'=|(\beta+45^\circ)-(\alpha+45^\circ)|=|\beta-\alpha|$

故 $\angle P'OQ'=\angle POQ$