

100指考 精彩解析

數學考科

臺南女中 / 高孟鋤 老師

【試題・答案】依據大考中心公布內容

發行人 / 陳炳亨
總召集 / 周耀琨
總編輯 / 蔣海燕
主編 / 陳俊龍
校對 / 李忠穎・吳崇欽・黃秉璿
美編 / 黃素美

出版 / 民國一〇〇年七月
發行所 / 710248 臺南市新樂路 76 號
編輯部 / 710252 臺南市新忠路 8-1 號
電話 / (06) 2619621#314
E-mail / periodical@hanlin.com.tw
翰林我的網 <http://www.worldone.com.tw>

NO.00843



翰林出版



一、前言

100 年指考數學甲，為 95 暫綱施行來的第三份試題，其題目也都在大考中心公佈的範圍內，只是今年的試題難易度分佈有由難（選擇題）到易（非選擇題），所以給人艱澀的感受，也應該會影響到考生的成績，但其鑑別度高。以下為筆者提供個人之見解，對於考題的分布分析與解析提供意見，如有疏漏，敬請指教。



二、試題分析

(一) 各單元比例配分

單元名稱	題數與配分	總計	比例
1. 指數與對數	單選 1. (6 分)	6	46% (一~四冊)
2. 三角函數的性質與應用	非選擇題 2.(2) (6 分)	6	
3. 向量	單選 3. (6 分)	6	
4. 空間中的平面與直線	多選 7. (8 分) 選填 D. (7 分)	15	
5. 機率與統計	單選 2. (6 分) 選填 B. (7 分)	13	54% (選修(I)、(II))
6. 矩陣	多選 5. (8 分)	8	
7. 不等式	選填 A. (7 分) 非選擇題 2.(1) (6 分)	13	
8. 多項式函數的極限與導數	多選 6. (8 分)	8	
9. 導函數的應用	單選 4. (6 分) 非選擇題 1.(1) (6 分)	12	
10. 多項式函數的積分	選填 C. (7 分) 非選擇題 1.(2) (6 分)	13	

(二) 試題內容特色

1. 仍舊依照往年的比重，雖在選修一、二的部分佔有超過一半的比例，但如同筆者在三月的『指考趨勢分析』中所提，各個單元配分平均，但以選修數學份量較重。
2. 圓與球面的題型與 98 年指考一樣缺席，這單元在 99 課綱中只剩下圓的部分，所以明年為 95 暫綱的指考最後一年，是否會有題型出現，有待思索。

3. 多選題 7，乍看之下似乎不好做題，其實就是用簡單的觀念做出正立方體的 12 個邊所在的直線方程式，再解交點即可。計算看似繁雜，但因為數據簡單，所以也不算是繁瑣的計算量。考驗考生是否有基本概念與動手計算的能力。
4. 非選擇題的 24 分，都是顯而易見的題型，要拿滿分不難，端看平時是否有確實練習。
5. 單選題的 3、4，均著重於幾何圖形。

(三) 結 論

關於 100 年指考數學甲的試題，雖有補教老師認為此份考題為 5 年來最難，但對於筆者的觀點來說，此份考題極具鑑別度，但還不算艱澀困難。單就非選擇題的 24 分，對認真練習的考生來說簡直就是送分的題目；選填題的 28 分，也是平時就應該會多做練習的題型。只是在拿到考卷的當下，從選擇題下手，對於題目的敘述方式會被嚇到而不知所措影響作答。於是，筆者建議考生於作答時應該綜觀一下考題再穩定自己的心情，以免因小而失大。

總而言之，計算能力很重要，強化圖形的概念也很重要，熟練基本技巧，相信對於考題一定可以迎刃而解的。



翰林 100 指考

數學甲 ▶ 試題解析

臺南女中 ◆ 高孟楸 老師

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 76 分）

一、單選題（24 分）

說明：第 1 題至第 4 題，每題 5 個選項，其中只有 1 個是最適當的選項，畫記在答案卡之「解答欄」。各題答對得 6 分，未作答、答錯、或畫記多於 1 個選項者，該題以零分計算。

1. 考慮坐標平面上滿足 $2^x = 5^y$ 的點 $P(x, y)$ ，試問下列哪一個選項是錯誤的？
- (1) $(0, 0)$ 是一個可能的 P 點
 - (2) $(\log 5, \log 2)$ 是一個可能的 P 點
 - (3) 點 $P(x, y)$ 滿足 $xy \geq 0$
 - (4) 所有可能的點 $P(x, y)$ 構成的圖形為一直線
 - (5) 點 P 的 x, y 坐標可以同時為正整數

答案 (5)

出處 第二冊第一章 指數與對數

測驗目標 指數與對數運算，並應用基本直線方程式觀念。

解析

$$(1)(2) \because 2^x = 5^y \Leftrightarrow x \log 2 = y \log 5$$

$\therefore (0, 0)$ 與 $(\log 5, \log 2)$ 可能為其中一組解。

$$(3) \because x \log 2 = y \log 5 \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{\log 2}{\log 5} \geq 0 \Leftrightarrow xy \geq 0$$

$$(4) \because x \log 2 = y \log 5 \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{\log 2}{\log 5} \geq 0 \Leftrightarrow y = \left(\frac{\log 2}{\log 5} \right) x \text{ 為一直線方程式，}$$

所以圖形為一直線。

$$(5) \because y = \left(\frac{\log 2}{\log 5} \right) x = k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \left(\frac{\log 5}{\log 2} \right) y = (\log_2 5) y \notin \mathbb{Z}$$

$\left(\text{因為 } \frac{\log 2}{\log 5} \text{ 非整數} \right)$ ，所以 x 與 y 不可能同時為整數。

難易度 中

類似題 《大滿貫復習講義·數學甲》第 4 頁範例 1

《指考關鍵 60 天·數學甲》第 15 頁範例 1

2. 將 1, 2, 3, 4 四個數字隨機填入右下方 2×2 的方格中，每個方格中恰填一數字，但數字可重複使用。
試問事件「 A 方格的數字大於 B 方格的數字、且 C 方格的數字大於 D 方格的數字」的機率為多少？

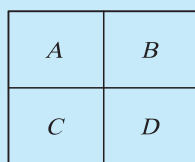
(1) $\frac{1}{16}$

(2) $\frac{9}{64}$

(3) $\frac{25}{64}$

(4) $\frac{9}{256}$

(5) $\frac{25}{256}$



答案 (2)

出處 第四冊第三章 機率統計 (I)

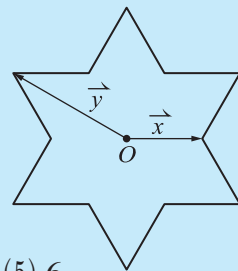
測驗目標 簡單的排列組合與機率的定義

解析 機率為 $\frac{C_2^4 C_2^4}{4^4} = \frac{6 \times 6}{16 \times 16} = \frac{9}{64}$ 。

難易度 易

類似題 《大滿貫復習講義·數學甲》第 76 頁指考觀摩站單選 1

3. 將一圓的六個等分點分成兩組相間的三點，它們所構成的兩個正三角形扣除內部六條線段後可以形成一正六角星，如圖所示的正六角星是以原點 O 為中心，其中 \vec{x} , \vec{y} 分別為原點 O 到兩個頂點的向量。若將原點 O 到正六角星 12 個頂點的向量，都寫成為 $a\vec{x} + b\vec{y}$ 的形式，則 $a+b$ 的最大值為何？



- (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 5 (5) 6

答案 (4)

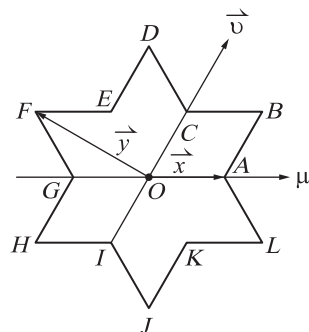
出處 第三冊第一章 向量

測驗目標 向量的分解與簡單的向量加減運算

解析 如附圖，利用斜坐標系 $u-v$ ，定義 \overline{OA} 與 \overline{OC} 為單位長，則可以得到

$$\begin{cases} \vec{x} = \vec{u} \\ \overline{OC} = \vec{v} \end{cases} \text{ 且 } \begin{cases} \vec{x} = \vec{u} \\ \vec{y} = -2\vec{x} + \vec{v} \end{cases}$$

則： $\overline{OA} = \vec{x} \Rightarrow a=1, b=0 \Rightarrow a+b=1$ ；



$$\begin{aligned} \overrightarrow{OB} &= \vec{u} + \vec{v} = 3\vec{x} + \vec{y} \Leftrightarrow a=3, b=1 \Leftrightarrow a+b=4 \\ \overrightarrow{OC} &= \vec{v} = 2\vec{x} + \vec{y} \Leftrightarrow a=2, b=1 \Leftrightarrow a+b=3; \\ \overrightarrow{OD} &= -\vec{u} + 2\vec{v} = 3\vec{x} + 2\vec{y} \Leftrightarrow a=3, b=2 \Leftrightarrow a+b=5 \\ \overrightarrow{OE} &= -\vec{u} + \vec{v} = \vec{x} + \vec{y} \Leftrightarrow a=1, b=1 \Leftrightarrow a+b=2; \\ \overrightarrow{OF} &= \vec{y} \Leftrightarrow a=0, b=1 \Leftrightarrow a+b=1 \\ \overrightarrow{OG} &= -\overrightarrow{OA} \Leftrightarrow a+b=-1; \overrightarrow{OH} = -\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow a+b=-4; \\ \overrightarrow{OI} &= -\overrightarrow{OC} \Leftrightarrow a+b=-3 \\ \overrightarrow{OJ} &= -\overrightarrow{OD} \Leftrightarrow a+b=-5; \overrightarrow{OK} = -\overrightarrow{OE} \Leftrightarrow a+b=-2; \\ \overrightarrow{OL} &= -\overrightarrow{OF} \Leftrightarrow a+b=-1. \end{aligned}$$

所以最大值為 5，故選(4)。

難易度 難

類似題 《大滿貫復習講義·數學甲》第 33 頁範例 1

《指考關鍵 60 天·數學甲》第 48 頁練習 1

4. 設 f 為實係數三次多項式函數。已知五個方程式的相異實根個數如下表所述：

方程式	相異實根的個數
$f(x) - 20 = 0$	1
$f(x) - 10 = 0$	3
$f(x) = 0$	3
$f(x) + 10 = 0$	1
$f(x) + 20 = 0$	1

關於 f 的極小值 α ，試問下列哪一個選項是正確的？

- (1) α 不存在
- (2) $-20 < \alpha < -10$
- (3) $-10 < \alpha < 0$
- (4) $0 < \alpha < 10$
- (5) $10 < \alpha < 20$

註：極小值是指相對極小值，或稱為局部極小值。

答案 (3)

出處 選修(II)第二章 導函數的應用

測驗目標 三次多項式函數圖形與極值問題

解析 由多項式函數圖形與多項式方程式解的個數的狀況，知道

$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=k \end{cases} \text{ 有 } m \text{ 個交點} \Leftrightarrow f(x) - k = 0 \text{ 有 } m \text{ 個相異實根。}$$

所以由題目中表所給的數據可以知道 $y=f(x)$ 的函數圖形與 x 軸交於相

異三點，且其可能之函數圖形有兩種，如附圖：

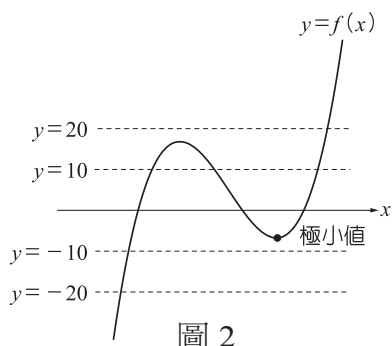


圖 2

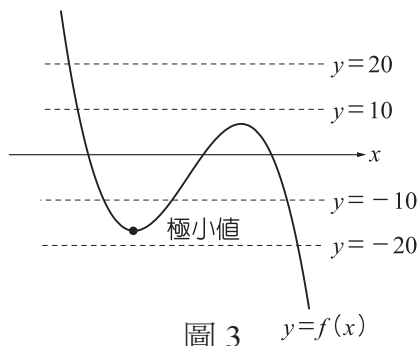


圖 3

所以由圖中可以知道其最低點之 y 座標，也就是極小值 α 滿足 $-10 < \alpha < 0$ 。

難易度 中

類似題 《大滿貫復習講義·數學甲》第 135 頁範例 3

二、多選題 (24 分)

說明：第 5 題至第 7 題，每題有 4 個選項，其中至少有 1 個是正確的選項。選出正確選項，畫記在答案卡之「解答欄」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分，答錯 1 個選項者，得 4 分，所有選項均未作答或答錯多於 1 個選項者，該題以零分計算。

5. 設 $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ 9 & b \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ c & d \end{bmatrix}$ 。已知 $AB = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ -2 & 15 \end{bmatrix}$ 且 A 的行列式之值為

2，試問下列哪些選項是正確的？

(1) $9a - 4b = -2$

(2) $ac = -24$

(3) $d = -15$

(4) $\begin{bmatrix} b & -a \\ -9 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & a \\ 9 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

答案 (1)(3)

出處 選修 (I) 第二章 矩陣

測驗目標 基本的矩陣乘法運算與行列式之運算。

解析 (1) $\det A = 4b - 9a = 2 \Leftrightarrow 9a - 4b = -2$

$$(2)(3) \because AB = \begin{bmatrix} 24 + ac & 28 + ad \\ 54 + bc & 63 + bd \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ -2 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ac = -21 \\ bc = -56 \end{cases}, \begin{cases} ad = -18 \\ bd = -48 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{c}{d} = \frac{7}{6} \Leftrightarrow d = \frac{6}{7}c \dots\dots\dots ①$$

$$\text{又已知 } \det(AB) = \det A \times \det B = \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ -2 & 15 \end{vmatrix} = 65$$

$$\Leftrightarrow \det B = \frac{65}{2} = 6d - 7c \dots\dots\dots ②$$

解①與②可以得到 $d = -15$ 且 $c = -\frac{35}{2}$ 。

$$(4) \begin{bmatrix} b & -a \\ -9 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & a \\ 9 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4b-9a & 0 \\ 0 & -9a+4b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}。$$

所以選(1)(3)。

難易度 易

類似題 《大滿貫復習講義·數學甲》第 92 頁範例 10

6. 假設兩地之間的通話費，第一個半分鐘是 5 元，之後每半分鐘是 2 元，不滿半分鐘以半分鐘計算，則 t 分鐘的通話費 $C(t)$ 公式如下（單位元）；

$$C(t) = 5 - 2[1 - 2t],$$

其中 $[x]$ 表示小於或等於 x 的最大整數，

例如： $[3.5] = 3$ ， $[-3.1] = -4$ ， $[-5] = -5$ 等。

試問下列哪些選項是正確的？

- (1) 10 分鐘的通話費是 43 元 (2) 在 $t \geq 0$ 時， $[1 - 2t] = -[2t - 1]$ 恆成立
 (3) $\lim_{t \rightarrow 10.5} C(t) = 45$ (4) $\lim_{t \rightarrow 11.2} C(t) = 49$

答案 (1)(4)

出處 選修(II)第一章 多項式函數的極限與導數

測驗目標 基本的極限概念，其中包含左右極限的概念。

解析 (1) $C(10) = 5 - 2[1 - 2 \times 10] = 5 - 2[-19] = 5 - 2 \times (-19) = 43$ 。

(2) 當 $t = 0.3$ 時， $[1 - 2t] = [0.4] = 0$ ，
 但 $-[2t - 1] = -[-0.4] = -(-1) = 1$ ，所以不成立。

(3) 當 $t \rightarrow 10.5^+$ 時， $10.5 < t < 10.6 \Leftrightarrow 21 < 2t < 21.2$
 $\Leftrightarrow -20.2 < 1 - 2t < -20 \Leftrightarrow [1 - 2t] = -21$ ；
 當 $t \rightarrow 10.5^-$ 時， $10.4 < t < 10.5 \Leftrightarrow 20.8 < 2t < 21$
 $\Leftrightarrow -20 < 1 - 2t < -19.8 \Leftrightarrow [1 - 2t] = -20$ ；

所以 $\lim_{t \rightarrow 10.5} C(t)$ 不存在。

(4) 當 $t \rightarrow 11.2^+$ 時， $11.2 < t < 11.3 \Leftrightarrow 22.4 < 2t < 22.6$
 $\Leftrightarrow -21.6 < 1 - 2t < -21.4 \Leftrightarrow [1 - 2t] = -22$ ；
 當 $t \rightarrow 11.2^-$ 時， $11.1 < t < 11.2 \Leftrightarrow 22.2 < 2t < 22.4$
 $\Leftrightarrow -21.4 < 1 - 2t < -21.2 \Leftrightarrow [1 - 2t] = -22$ ；

所以 $\lim_{t \rightarrow 11.2} C(t) = 5 - 2 \times (-22) = 49$ 。

所以選(1)(4)。

難易度 中

類似題 《大滿貫復習講義·數學甲》第 120 頁範例 7

③ 與 ℓ_3 平行的直線，方向向量均為 $(0, 0, 1)$ ：

$$\text{方程式分別為 } \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=t \end{cases}, \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \\ z=t \end{cases}, \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=t \end{cases}, \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \\ z=t \end{cases},$$

此四條線與平面的交點分別為 $(1, -1, 0)$ ，

$(-1, -1, 2)$ ， $(1, 1, -2)$ ， $(-1, 1, 0)$ 。但邊上的交點只有 $A(1, -1, 0)$ ， $(-1, 1, 0)$ 。

所以選(2)。

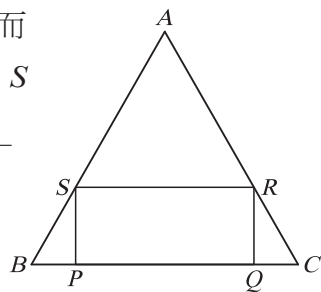
難易度 中

類似題 《大滿貫復習講義·數學甲》第 42 頁範例 1 的類題

三、選填題 (28 分)

說明：第 A 題至第 D 題為選填題，將答案畫記在答案卡之「解答欄」所標示的列號 (8-15) 內。每一題完全答對得 7 分，答錯不倒扣；未完全答對不給分。

- A. 如圖所示， $PQRS$ 為一給定的矩形，長 $\overline{PQ}=12$ 、寬 $\overline{QR}=5$ ，而 $\triangle ABC$ 為等腰三角形，其中 $\overline{AB}=\overline{AC}$ ， P, Q 在 \overline{BC} 邊上， R, S 分別在 $\overline{CA}, \overline{AB}$ 邊上，則當 $\triangle ABC$ 中 \overline{BC} 邊上的高為 89 時， $\triangle ABC$ 的面積為最小。



答案 8 1 9 0

出處 選修 (I) 第三章 不等式

測驗目標 算幾不等式的應用

解析 如右圖，作 \overline{BC} 邊上的高 \overline{AM} 交 \overline{SR} 於 T 點，且假設 $\overline{AT}=x>0$ ， $\overline{MC}=y>0$ ，利用

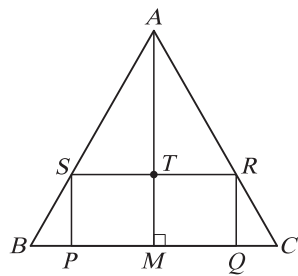
$$\triangle ATR \sim \triangle AMC \Leftrightarrow \frac{\overline{AT}}{\overline{TR}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} = \frac{x}{6} = \frac{x+5}{y}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{x}(6x+30) = 6 + \frac{30}{x},$$

$$\text{所以 } \triangle ABC \text{ 面積} = \frac{1}{2} \times 2y \times (x+5) = \left(6 + \frac{30}{x}\right)(x+5)$$

$$= 6x + \frac{150}{x} + 60 \geq 2\sqrt{(6x)\left(\frac{150}{x}\right)} + 60 = 120,$$

所以當 $6x = \frac{150}{x}$ (即 $x=5$) 時， $\triangle ABC$ 面積有最小值 120。此時高為 10。



難易度 中

類似題 《大滿貫復習講義·數學甲》第 99 頁範例 1
《指考週復習·數學甲》第 50 頁填充 F

- B. 某手機公司共有甲、乙、丙三個生產線，依據統計，甲、乙、丙所製造的手機中分別有 5%，3%，3% 是瑕疵品。若公司希望在全部的瑕疵品中，由甲生產線所製造的比例不得超過 $\frac{5}{12}$ ，則甲生產線所製造的手機數量可占全部手機產量的百分比至多為 ⑩⑪ %。

答案 ⑩ 3 ⑪ 0

出處 選修 (I) 第一章 機率與統計 (II)

測驗目標 貝氏定理

解析 假設甲的生產量為 a ，則乙與丙的生產量為 $(1-a)$ ，則：

$$\frac{5\% \times a}{5\% \times a + 3\% \times (1-a)} \leq \frac{5}{12} \Leftrightarrow 12a \leq 2a + 3 \Leftrightarrow a \leq 0.3, \text{ 所以至多為 } 30\%。$$

難易度 易

類似題 《大滿貫復習講義·數學甲》第 63 頁範例 3

《指考週復習·數學甲》第 10 頁多選 5

《指考關鍵 60 天·數學甲》第 77 頁練習 6

- C. 坐標平面上，已知函數 $f(x) = 4x^3 + x - 2$ 的圖形以 $A(1, 3)$ 為切點的切線為 L ，則以切線 L 及曲線 $y = f(x)$ 為界所圍成區域的面積為 ⑫⑬。

答案 ⑫ 2 ⑬ 7

出處 選修 (II) 第一章 多項式函數的極限與導數

選修 (II) 第三章 多項式函數的積分

測驗目標 微分的應用 (直線斜率) 與積分的應用 (曲線所圍成的面積)

解析 $\because f'(x) = 12x^2 + 1 \Leftrightarrow m = f'(1) = 13$

$$\Leftrightarrow \text{直線 } L: y - 3 = 13(x - 1) \Leftrightarrow y = 13x - 10,$$

函數圖形與直線 L 的交點之 x 坐標即為 $4x^3 + x - 2 = 13x - 10$ 的解，

$$\therefore 4x^3 - 12x + 8 = 4(x - 1)^2(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ 或 } -2。$$

切線與曲線所圍成的區域面積為

$$\int_{-2}^1 (4x^3 + x - 2 - 13x + 10) dx = \int_{-2}^1 (4x^3 - 12x + 8) dx = (x^4 - 6x^2 + 8x) \Big|_{-2}^1 = 27。$$

難易度 中

類似題 《大滿貫復習講義·數學甲》第 157 頁範例 10

《指考關鍵 60 天·數學甲》第 157 頁練習 1

- D. 坐標空間中，若平面 $E: ax + by + cz = 1$ 滿足以下三條件：

(1) 平面 E 與平面 $F: x + y + z = 1$ 有一夾角為 30° ，

(2) 點 $A(1, 1, 1)$ 到平面 E 的距離等於 3，

(3) $a + b + c > 0$ ，

則 $a + b + c$ 的值為 ⑭
⑮。(化成最簡分數)

答案 ⑭ 1 ⑮ 3

出處 第三冊第二章 空間中的平面與直線

測驗目標 點到平面的距離公式，兩平面的夾角

解析 平面 E 的法向量 $\vec{n} = (a, b, c)$ 、平面 F 的法向量 $\vec{v} = (1, 1, 1)$ ，所以

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{|\vec{n}| |\vec{v}|} = \frac{a+b+c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2} \times \sqrt{3}}$$

$$(\because a+b+c > 0 \text{ 所以取正值}) \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \frac{2}{3}(a+b+c) \dots\dots\dots ①$$

$$\text{又 } A \text{ 點到平面 } E \text{ 的距離} = \frac{|a+b+c-1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 3$$

$$\Leftrightarrow a+b+c-1 = \pm 3\sqrt{a^2+b^2+c^2} \dots\dots\dots ②$$

由①與②可以得到 $a+b+c = \frac{1}{3}$ (-1 不合)。

難易度 中

類似題 《大滿貫復習講義·數學甲》第 44 頁範例 3

《指考關鍵 60 天·數學甲》第 58 頁練習 7

第貳部分：非選擇題（占 24 分）

說明：本大題共有二題計算證明題，答案務必寫在答案卷上，並於題號欄標明題號（一、二）與子題號（(1)、(2)），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分。務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每題配分標於題末。

一、已知實係數三次多項式函數 $y=f(x)$ 的最高次項係數為 12，其圖形與水平線 $y=25$ 交於相異的三點 $(0, 25)$ ， $(1, 25)$ 及 $(2, 25)$ 。

(1) 試求曲線 $y=f(x)$ 圖形上的反曲點坐標。（6 分）

(2) 試求定積分 $\int_0^2 f(x) dx$ 之值。（6 分）

答案 (1) $(1, 25)$ (2) 50

出處 選修(II)第二章 導函數的應用

選修(II)第三章 多項式函數的積分

測驗目標 函數的幾何意義、反曲點的求法與定積分

解析 (1) $y=f(x)$ 與 $y=25$ 的交點即為 $f(x)-25=0$ 的解

$$\therefore f(x)-25=12(x-0)(x-1)(x-2) \Leftrightarrow f(x)=12x^3-36x^2+24x+25。$$

$$\therefore f'(x)=36x^2-72x+24 \text{ 且 } f''(x)=72x-72=72(x-1)$$

$$\therefore f''(x)=0 \Leftrightarrow x=1 \Leftrightarrow \text{反曲點為 } (1, f(1))=(1, 25)。$$

$$\begin{aligned} (2) \int_0^2 f(x) dx &= \int_0^2 (12x^3-36x^2+24x+25) dx \\ &= (3x^4-12x^3+12x^2+25x) \Big|_0^2 = 50。 \end{aligned}$$

難易度 中

類似題 《大滿貫復習講義·數學甲》第 133 頁範例 2、第 151 頁範例 4
《指考關鍵 60 天·數學甲》第 152 頁範例 2

二、(1) 試求所有滿足 $\log(x^3 - 12x^2 + 41x - 20) \geq 1$ 的 x 值之範圍。(6 分)

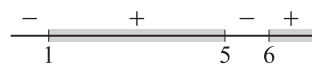
(2) 試證：當 $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$ 時， $3^{\cos\theta} \geq 3^{1+\sin\theta}$ 。(6 分)

答案 (1) $1 \leq x \leq 5$ or $x \geq 6$ (2) 見解析

出處 第二冊第三章 三角函數的性質與應用
選修(1)第三章 不等式

測驗目標 對數不等式與三角函數的疊合

解析 (1) $\log(x^3 - 12x^2 + 41x - 20) \geq 1 = \log 10$
 $\Leftrightarrow x^3 - 12x^2 + 41x - 20 \geq 10$
 $\Leftrightarrow x^3 - 12x^2 + 41x - 30 \geq 0$
 $\Leftrightarrow (x-1)(x-5)(x-6) \geq 0$
 所以 $1 \leq x \leq 5$ 或 $x \geq 6$



(2) $\because \cos\theta - (1 + \sin\theta) = \cos\theta - \sin\theta - 1 = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) - 1$

且 $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi \Leftrightarrow -2\pi \leq -\theta \leq -\frac{3\pi}{2}$

$\Leftrightarrow -\frac{7\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4} - \theta \leq -\frac{5\pi}{4}$,

所以由右圖可知，

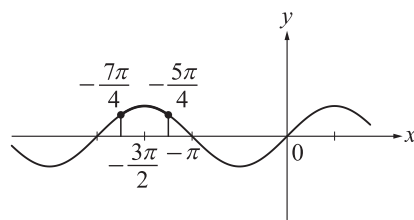
$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \leq 1$

$\Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) - 1 \leq \sqrt{2} - 1$

$\Leftrightarrow \cos\theta - (1 + \sin\theta) \geq 0$

$\Leftrightarrow \cos\theta \geq 1 + \sin\theta \Leftrightarrow 3^{\cos\theta} \geq 3^{1+\sin\theta}$

(因為指數函數中，底數比 1 時為增函數)。所以得證。



難易度 中

類似題 《大滿貫復習講義·數學甲》第 8 頁範例 6

